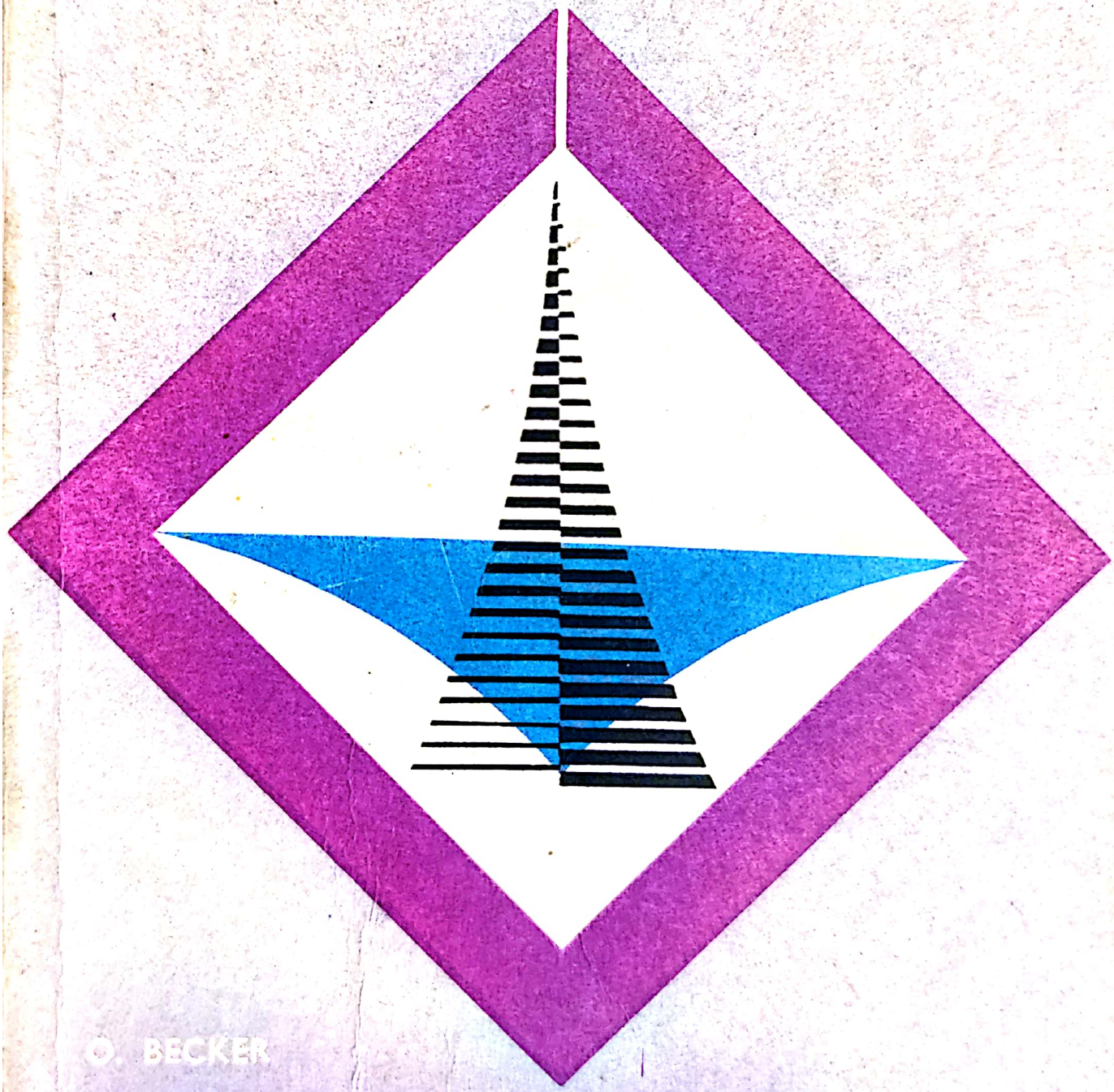
M
MATEMATICA

ENCICLOPEDIA DE BUZUNAR



O. BECKER

Măreția și limitele gîndirii matematice

Scanned with OKEN Scanner

334
B33

OSKAR BECKER

Măreția și limitele gîndirii matematice

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ • BUCUREȘTI, 1968

Scanned with OKEN Scanner

OSKAR BECKER, GRÖSSE UND GRENZE DER MATHEMATISCHEN DENKWEISE
Verlag Karl Alber, Freiburg/München, 1959.

ÎN ROMÂNEȘTE DE :
EMERIC TOTH ȘI IOANA-TOTH

COPERTA COLECȚIEI: T. MIRONESCU

Scanned with OKEN Scanner

Prefață

Blaise Pascal a scris despre măreția și mizeria omului, Honoré de Balzac despre strălucirea și decadența curtezanelor; de ce nu s-ar putea scrie și despre măreția și mizeria matematicii? Dar matematica este o abstracție sau, în orice caz, o ipostaziere a spiritului obiectiv sau chiar absolut, or acesta poate fi, fără îndoială, măreț, dar în nici un caz mizer, asemenea unui om. Totuși, nu este cu neputință, probabil, să se stabilească dacă matematica se poate dezvolta la nesfîrșit sau dacă, asemenea matematicianului, are și ea limitele sale proprii.

Caracterul măreț al dominației naturii, dominație ce a devenit posibilă în urma rezultatelor matematice din ultimele trei secole (dar, desigur, nu numai datorită acestora), a devenit astăzi evident pentru noi într-o formă oarecum neliniștitoare. A ieșit la iveală însă și echivocul acestei măreții: teama ce a inspirat-o, dar și necesitatea de a stăpîni natura, fără de care nu am mai putea duce o existență umană demnă. Atîta numai, și ar fi suficient pentru a ne îndemna să medităm asupra *măreției și limitelor gîndirii matematice*. În legătură cu aceasta se impune, desigur, întrebarea: cum s-a ajuns aici? Spre elucidare, va fi absolut necesar să aruncăm o privire asupra evoluției gîndirii matematice.

Matematizarea științelor naturii, care a dus în secolele XIX și XX la un înalt nivel de stăpînire a forțelor naturii, are un trecut de circa trei secole. Ea a început în secolul al XVII-lea, aproape o dată cu Galilei, și și-a atins primul punct culminant în opera lui Newton. Matematica este însă mai veche, cu mult mai multe secole. Începuturile ei pot fi situate în Orientul antic, în Babilon și în Egipt, în primele secole ale celui de-al II-lea

Scanned with OKEN Scanner

mileniu î.e.n. Ea a devenit însă o știință proprie, în sensul european al termenului, abia la începutul secolului al VI-lea î.e.n., la greci, care au preluat moștenirea babiloneano-egipteană, dar — la fel ca și pe celelalte moșteniri culturale (scriere, arte plastice) — au supus-o unei transformări structurale. O a doua transformare radicală a urmat apoi în „Occidentul" popoarelor romano-germanice, în secolul al XVII-lea, cînd au fost inventate algebra literală („formula", care azi, în ochii noștri, pare a fi caracteristica supremă pentru tot ce are de-a face cu matematica), geometria analitică și analiza infinitezimală. Concomitent, și legată de acestea, a apărut noua dinamică a lui Newton, care a permis ca fenomenele (mecanice) cerești și terestre să fie explicate pe baza acelorași principii fundamentale. De aici, o evoluție continuă ne-a dus, atît pe tărîmul matematicii, cît și pe cel al fizicii (în sensul cel mai larg al cuvîntului) la știința zilelor noastre.

Dacă vrem să pătrundem sensul acesteia, va trebui să ne ocupăm puțin de dezvoltarea istorică schițată mai sus. Desigur, ne interesează aici nu amănuntele și nici ansamblul acestei dezvoltări — luată în toată extinderea ei, mai mult sau mai puțin continuă — ci va trebui să acordăm atenție mai mult punctelor ei focale sau, mai curînd, momentelor decisive ale acestei vaste istorii a ideilor capitale care s-au manifestat în desfășurare. În privința documentelor ne permitem să trimitem cititorul la una din lucrările noastre recente[1].

Dar nu ne vom opri aici. Vom căuta să punem accentul în mod deosebit pe trăsăturile caracteristice ale stadiului actual al problemei. Pentru că abia aici va cuceri gîndirea matematică dimensiunile recent atinse, ajungînd pînă la limitele ei, în măsura în care asemenea limite există. Limitele de care vorbim apar pe de o parte ca fiind imanente gîndirii matematice, pe de altă parte ele se oferă cercetării ca o problemă filozofică independentă.

Cu acestea, am delimitat tema pe care o tratăm în cartea de față.

---

[1] *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, Freiburg /München, ed. a 2-a, 1964 (de acum înainte, citată cu GM).

Scanned with OKEN Scanner

I

Gîndirea pitagoreică

1

Despre Pitagora se spune[1] că el ar fi primul care a ridicat matematica la rangul unei învăţături libere *(paideia)*. După Aristotel[2], aceasta însemna o ştiinţă cultivată ca un scop în sine, nu în vederea unui profit sau a unui divertisment. Avem însă motive să ne îndoim de caracterul veridic al informaţiei cu privire la Pitagora, pentru că matematica a apărut cu o generaţie înainte, la începutul secolului al VI-lea î.e.n., în cercul naturaliştilor milesieni (Tales, Anaximandru). Este de asemenea adevărat că în Babilon a fost cultivată, cu multe secole înainte, o matematică departe de un stadiu primitiv, o algebră şi o geometrie dezvoltate în şcolile de „scribi", adică în învăţămîntul destinat pregătirii funcţionarilor administrativi ai marilor domenii de stat şi particulare. La fel s-au petrecut lucrurile şi în Egipt, cu singura deosebire că nivelul cunoştinţelor matematice a rămas aici mai scăzut. Dar matematica a rămas în Orientul antic legată de scopuri exterioare, chiar dacă în cadrul procesului de învăţămînt au fost din cînd în cînd depăşite — de dragul unor exerciţii — cerinţele imediate ale practicii (precum s-a mai întîmplat şi în alte timpuri, şi în alte condiţii). În general, matematica orientală s-a limitat la un cadru determinat de aplicaţii la construcţii înalte, excavaţii, fundaţii, agrimensură, astronomie şi la probleme legate de partiţia unor moşteniri. Grecii, pentru care „omul tinde prin natura sa către ştiinţă"[3], au

[1] Proclus, *Euclidem*, ed. Friedlein, p. 65, 15.
[2] *Met.*, A 2, 982 b, 25—28.
[3] Aristotel, *Met.*, A 1, 980 a, 21. Vezi şi fragmentele presocraticilor: *Anaxagora*, A 29, *Democrit*, B 118 (Diels).

Scanned with OKEN Scanner

fost primii care au văzut în matematică o cunoaștere pură. Nu știm însă dacă această „puritate" a matematicii a devenit sau nu explicită înaintea lui Pitagora, deoarece informațiile de care dispunem cu privire la primii matematicieni greci sînt legate aproape toate de probleme aplicative. Conform acestora, Tales ar fi prezis o eclipsă solară, ar fi determinat înălțimea piramidelor egiptene, precum și depărtarea unei corăbii pe mare, plecînd de la unele observații efectuate de pe mal. Anaximandru ar fi instalat în Sparta instrumente astronomice pentru urmărirea mișcării diurne și anuale a Soarelui, a construit un glob stelar *(sphaira)* și a întocmit o hartă a Pămîntului.

Dar acestea nu reprezintă totul. Tales și Anaximandru au fost și „filozofi", căci ei au încercat să stabilească o imagine a lumii ce nu mai depindea de tradiționalele închipuiri mitice. Fenomenele naturale (ca, de exemplu, cutremurele sau inundațiile Nilului) puteau fi explicate acum fără ca ele să mai fie reduse la personificări demonice și divine. La Tales nu poate fi decelată nici un fel de legătură între filozofia sa (care, precum se știe, considera apa ca element ancestral) și matematică; în schimb, Anaximandru a construit prima imagine a lumii bazată pe relații numerice — o realizare deschizătoare de drumuri, a cărei importanță poate fi cu greu apreciată. Anaximandru este astăzi cunoscut mai ales printr-o așa-numită „vorbă" *(„Spruch")* — de fapt un fragment transmis de Simpliciu și Teofrast. Dimensiunile reale ale acestui fragment nu sînt cunoscute, iar sensul său nu va putea fi, probabil, niciodată deslușit ireproșabil, din cauza caracterului său fragmentar. Deși are un caracter pur doxografic, acest fragment ne dă, totuși, posibilitatea să vedem clar conținutul esențial al sistemului lumii, elaborat de Anaximandru, cel puțin în forma lui tradițională[4].

---

[4] *Der „Spruch"*, fragm. B 1 (Diels), după Simpliciu, în Aristotel, *Fizica*, p. 24, 13. *Sistemul lumii*, A 11, după Hipolyt., Ref. I 6, 3—5, cp. A 18, A 1, A 22. *Harta Pămîntului*, A 6, A 7. *Instrumente astronomice în Sparta*, A 1 (1) (2). Vezi, de asemenea, W. Kranz, *Kosmos*, în „Archiv für Begriffsgeschichte", II, 1, Bonn, 1955, p. 12 și urm.

Scanned with OKEN Scanner

În această imagine a lumii, Pământul are forma unei „pietre de coloană“ (un tambur de piatră, din care erau construite coloanele templelor greceşti), raportul diametrului faţă de înălţime fiind de 3 : 1. Pământul este considerat ca planînd în centrul universului, deoarece nu există nici un motiv ca să fie situat mai mult într-una decît în cealaltă parte a universului, conceput pe baza unei simetrii radiale. Aici apare pentru prima dată în istorie principiul simetriei, care mai joacă şi astăzi un rol atît de important în matematică, cum şi în fizica teoretică — principiu care va fi relevat mai tîrziu şi de Platon. Mai departe, asistăm aici şi la o primă ediţie a unei „teorii a relativităţii“, avînd în vedere faptul că gîndirea naivă consideră conceptele „sus“ şi „jos“ ca determinări absolute. De exemplu, aşa sînt văzute acestea în antichitate de Democrit şi de Epicur. Pentru Anaximandru însă, „jos“ este direcţia în care se află scoarţa terestră, semnificaţia reală a termenului schimbîndu-se, aşadar, în funcţie de loc. Pământul este înconjurat de trei inele *(kykloi)*, situate la o distanţă de 9, 18, 27, adică de 3·3, 2·(3·3), 3·(3·3) diametre pământeşti. Pe cel din interior sînt situate sau stelele fixe, sau planetele lucitoare (interpretare contestată); pe cel din mijloc se află Luna, pe cel din exterior, Soarele. Interiorul ultimului inel este umplut în întregime de o substanţă incandescentă, vizibilă nouă printr-un orificiu lateral, prin care vedem şi imaginile constelaţiilor. Cosmosul, în totalitatea lui, nu este etern, ci se naşte din *apeiron*, adică din nemărginit, iar după un interval de timp — pare-se bine determinat — dispare din nou în acelaşi nemărginit. Noţiunea de *apeiron* constituie o încercare de a raţionaliza imaginea mitică a „haosului“.

Nu este locul aici să insistăm asupra problemelor filozofice, poate chiar „speculative“ ale gîndirii lui Anaximandru. Importantă este acum pentru noi doar apariţia subită a elementului matematic în această imagine elină timpurie a cosmosului — un fapt care nu poate fi trecut cu vederea. Acest element matematic poate avea încă o aparenţă naivă, iar numărul 3, care joacă aici factorul determinant, are, probabil, o origine mitică. Hesiod (*Teo-*

Scanned with OKEN Scanner

gonia, p.722 şi urm.) vorbeşte, bunăoară, de un bulgăre metalic (*akmōn*) — poate un meteor — care, căzînd de pe bolta cerească, are nevoie de 9 zile pînă cînd ajunge la Pămînt, şi ar avea nevoie de încă 9 zile pentru a ajunge pînă în fundul Tartarului. (Tartarul pare să fi fost conceput deci ca avînd o poziţie simetrică faţă de cer, fiind o semisferă de aceeaşi mărime, orientată în jos.) Toate acestea nu contrazic însă, în principiu, faptul că la Anaximandru apare — şi îşi găseşte într-o primă formă realizarea — cerinţa de a reda structura universului prin intermediul unor relaţii numerice. Această idee prevesteşte, aşadar, o teză pitagoreică, la fel precum conceptul nemărginitului aparţine şi el noţiunilor fundamentale ale filozofiei pitagoreice. Desigur, toate acestea aparţin încă speculaţiei pure şi nu au nici o legătură directă cu observaţia empirică. Dar această trăsătură îi este caracteristică gîndirii în stadiul său incipient, aşa cum se poate observa şi la copii. Imaginea lumii se acomodează cu multă lentoare datelor de observaţie. Trebuie să atragem însă atenţia asupra faptului că pe tărîm astronomic Anaximandru a procedat totuşi cu rigoare; şi, desigur, instalarea în Sparta a unor instrumente pentru urmărirea mişcării solare a presupus măsurarea înălţimii polului pentru acest loc, precum şi efectuarea altor măsurători.

2

Datarea filozofiei pitagoreice nu este o sarcină prea uşoară. Sursele mai recente, care provin din epoca neopitagoreică a primelor secole ale erei noastre, sînt bogate în amănunte dar nu inspiră încredere. Sursele mai vechi (înainte de toate Aristotel) sînt în schimb parcimonioase şi, în privinţa unor amănunte, adesea dificil de interpretat. Din fericire însă, amănuntele de ordin istoric, şi în mod deosebit problema datării nu prezintă o importanţă deosebită din punctul de vedere care ne preocupă aici: stabilirea trăsăturilor esenţiale ale matematicii eline din perioada ei incipientă. Filozofia şi matematica pita-

Scanned with OKEN Scanner

goreică vor putea fi considerate, pînă în epoca lui Platon, ca o totalitate unitară, iar cu privire la acest corp de doctrină dispunem totuşi de anumite date, în parte prin Aristotel, în parte prin analiza critică a *Elementelor* lui Euclid (pentru aritmetica şi geometria pitagoreică) şi, în fine, prin diversele surse doxografice (în privinţa astronomiei şi a teoriei armoniei muzicale). Nu trebuie scăpate apoi din vedere fragmentele lui Filolaus, păstrate în versiune verbală originală (pe care noi, împreună cu W. Kranz, le acceptăm drept veritabile, cel puţin în privinţa conţinutului), şi, de asemenea, nici fragmentele lui Architas. Fragmentele ce ni s-au păstrat din şi despre opera lui Zenon din Eleea conţin de asemenea anumite indicaţii. Aici nu ne putem ocupa însă de prezentarea amplă a matematicii pitagoreice. O asemenea prezentare a fost efectuată de alţi autori [5], precum şi — cu altă ocazie — de noi [6]. Ne vom strădui să caracterizăm în cîteva trăsături mai mult aspectele filozofice ale pitagoreismului, deoarece acestea constituie, oricum, nucleul său central.

Informaţiile pe care ni le-a transmis Aristotel, înainte de toate în *Metafizica* (cărţile A, M, N), nu ne oferă, pe cît se pare, o imagine unitară şi consistentă a învăţăturii pitagoreice despre numere şi raportul acestora cu lumea. Pentru că o dată se afirmă, bunăoară, că numerele sînt lucrurile înseşi, altă dată se susţine că numerele sînt conţinute *în* lucruri, a treia oară, din nou, că lucrurile sînt

---

[5] Vezi, înainte de toate, B. L. van der Waerden, *Die Harmonielehre der Pythagoreer*, în „Hermes", 78, 1943, pp. 163—199; *Die Arithmetik der Pythagoreer*, în „Mathematische Annalen", 120, 1947—1949, pp. 111—153, 676—700; *Die Astronomie der Pythagoreer*, în „Verhandl. d. K. Nederl. Akad. v. Wetensch.", Afd. Natuurk. Deel XX, nr. 1, Amsterdam, 1951. Rezultatele acestor cercetări sînt cuprinse în *Erwachende Wissenschaft*, Basel-Stuttgart, 1957, pp. 155—168, 177—209, 247—262. Despre legătura strînsă dintre matematică şi muzică în Elada antică tratează lucrarea lui J. Lohmann, *Musike und Logos*, în „Wiss. Zeitschr. d.Univ. Greifswald", VI; Gesellschafts und Sprachwiss., Reihe nr. 1/2, 1956/57, pp. 31—37, precum şi *Die griechische Musik als mathematische Form*, în „Archiv für Musikwissenschaft", XIV, 1957, pp. 147—155; *Der Ursprung der Musik*, ibidem, XVI, 1959, p. 148 şi urm. — toate de acelaşi autor.

[6] GM, p. 34 şi urm.

compuse *din* numere, și Aristotel însuși nu pare a face o distincție esențială între toate aceste formulări [7]. Este adevărat că Aristotel a încercat să exprime învățătura pitagoreică prin intermediul „categoriilor" concepute de el — categorii modelate în conformitate cu modul de exprimare și cu sintaxa limbii eline și în strînsă dependență de atitudinea sa critică împotriva pitagoreicilor și a lui Platon — încercare care nu putea duce decît la o reușită parțială. Astfel, în prezentarea sa, pitagoreicii ar fi definit numărul ca esența substanței *(ousia)* lucrurilor existente sau, de asemenea, ca originea, principiul *(archē)* lor (un concept aplicat, de altfel, și ultimelor elemente primare ale filozofiei naturii elaborate de vechii gînditori ionieni) [8]. Într-un pasaj, în aparență diferit de cele precedente, Stagiritul afirmă că pitagoreicii ar fi stabilit existența unor analogii *(homoiōmata)* între proprietățile numerelor și ale lucrurilor — în mod special în privința structurii armoniei muzicale — precum și în construcția și mișcările firmamentului. Toate acestea sînt exprimate în cuvintele „cerul întreg *ar fi* armonie și număr", fără ca Aristotel să remarce existența unei *esențiale* discontinuități de idei între toate aceste definiții [9].

Poate fi de asemenea întîlnită formularea înrudită: lucrurile ar fi ceea ce sînt prin imitarea sau poate, mai bine zis, prin reprezentarea (*mimēsis*) numerelor — o concepție care poate fi identificată, în esența ei, cu teoria platoniciană a participării *(methexis)* lucrurilor la ideile lor [10]. O asemenea identificare este explicabilă, luînd în considerare faptul că Aristotel are în vedere teoria platoniciană tîrzie, în care ideile sînt definite ca „numere".

---

[7] Cele mai importante și elocvente fragmente (cf. și G. Martin, *Klassische Ontologie der Zahl*, în *Kantstudien*, Erg. — H. 70, Köln, 1956, § § 1—3): (a) Numerele *sînt* lucruri: *Met.*, A 5, 987 b, 28; M 8, 1083 b, 17. (b) Numerele sînt *în* lucruri: *Met.*, M 6, 1080 b, 1; *Fizica*, III, 4, 203 a, 6. (c) Lucrurile sînt compuse *din* numere: *Met.*, A 8, 990 a, 22; M 6, 1080 b, 2—3, 17—19; M 8, 1083 b, 11—18; N 3, 1090 a, 23, 32; *De coelo*, III, 1, 300 a, 15—17.

[8] Numărul ca *ousia*: *Met.*, A 5, 987 a, 18; Δ8, 1017 a, 20; cf. I 2, 1053 b, 11—13. Numărul ca *archē*: A 5, 986 a, 16.

[9] *Met.*, A 5, 985 b, 27 — 986 a, 3 (cf. 986 a, 21).

[10] *Met.*, A 6, 987 b, 11—12.

Deosebirea esențială între cele două concepții se manifestă, conform Stagiritului, în aceea că Platon separă Ideile, în timp ce pitagoreicii nu separă numerele de lucruri [11].

Dacă încercăm însă o explicitare a acestei schițe fugare a doctrinei pitagoreice în amănuntele sale obiective, atunci ne lovim imediat de contradicții și paradoxuri. Pentru că va trebui să admitem că dacă numerele sînt *în* lucruri sau dacă lucrurile sînt compuse *din* numere, atunci lucrurile nu *sînt* pur și simplu numere. Fără îndoială că ultima formulare trebuie considerată o expresie prescurtată a primelor două, mai explicite, deși diversele formulări apar adesea una alături de alta, în una și aceeași propoziție [12]. Semnificația tuturor acestor fragmente este însă în mod invariabil aceeași, și anume că numerele sînt imanente lucrurilor, indiferent dacă sînt concepute ca elemente componente ale lucrurilor înseși sau dacă numai „elementele" *(stoicheia)* numerelor sînt identificate cu elementele lucrurilor. Aceste „elemente" sînt „mărginitul" *(peras)* și „nemărginitul" *(apeiron)* [13]. Imanența numărului în lucruri, despre care s-a vorbit mai sus, trebuie interpretată ca prezența unei structuri determinate de relații numerice, asemănătoare unui fel de schelet aritmetic al lucrurilor, analog felului de a considera astăzi într-un cristal așa-numita „rețea spațială" (cu grupul asociat).

3

Elementul nou adus de Platon în această problematică a fost accentuarea deosebirii dintre desăvîrșita imuabilitate și determinare a numărului, dotat cu „caracter ideal", și caracterul neprecis și incert („curgător", spune Platon, în legătură cu heraclitienii) al lucrurilor accesibile simțurilor noastre. Desigur, păreri analoge sînt exprimate, în esență, și de Filolaus. Distincția introdusă

---

[11] *Met.*, A 6, 987 b, 27—28; N 3, 1090 a, 20—25.
[12] De exemplu, în *Met.*, M 8, 1083 b, 17—19.
[13] *Met.*, A 5, 986 a, 1—2; vezi *Filolaus*, fragm. B 2 (Diels).

ne este familiară şi astăzi în domeniul geometric; şi noi distingem cercul accesibil simţurilor noastre: acesta rămîne, chiar şi în cel mai exact desen posibil, inexact faţă de cercul „ideal", perfect la care se gîndeşte de fapt geometrul. Desigur, acest cerc ideal, care poate apărea într-un număr arbitrar de exemplare într-o figură geometrică mai complexă, nu este încă identic cu însăşi ideea cercului, idee necesarmente unică şi care ar putea fi desemnată, bunăoară, ca însăşi „circularitatea". În domeniul numerelor însă nu întîlnim o asemenea pluralitate. Dacă avem trei oameni în faţa noastră, atunci acest exemplu reprezintă însuşi numărul 3 într-un mod perfect, deoarece 3 se află la o distanţă finită de 2 şi 4. Putem afirma cu certitudine: acest grup conţine trei oameni, şi nu doi, şi nici patru. Dar Platon şi elevii săi gîndeau altfel. Ei cereau unui număr al „aritmeticii filozofice" să fie compus din unităţi absolut egale între ele[14]. Acesta este conceptul *arithmos monadikos* sau *mathematikos*, care trebuie riguros distins de „numărul numărat " al lucrurilor accesibile simţurilor[15]. Mai departe, trebuie să deosebim separat de acestea şi „numărul ideal" sau, mai precis, „ideea-număr" *(ideōn arithmos)*, un concept specific platonician, deosebit de dificil, asupra căruia însă nu este necesar să insistăm aici.

Pitagoreicii nu au introdus această distincţie, ceea ce, după cum ne informează Aristotel, i-a scăpat de anumite

---

[14] *Rep.*, VII, 526 a; *Phileb.*, 56 d—e.

[15] *Fizica*, IV, 11, 219 b, 6. Aristotel opune „numărul numărat", numărului „cu care numărăm". W. D. Ross interpretează această ultimă expresie ca numărul matematic sau monadic. Dar este oare această interpretare justificată? Fără îndoială că într-o asemenea interpretare trebuie neapărat luată în considerare teoria aristotelică a abstracţiei matematice, deoarece matematica există, conform opiniei sale, numai *ex aphaireseōs* (prin abstracţie). Numărul monadic al lui Platon însă nu este în nici un caz o abstracţie, ci se bazează, din punct de vedere ontologic, pe sine însuşi, fiind o esenţă de sine stătătoare, *ousia*, în sensul deplin al cuvîntului. Vezi, în legătură cu această chestiune, A. Wedberg, *Plato's Philosophy of Mathematics*, cap. V, Stockholm, 1955, p. 63 şi urm., împreună cu anexele respective. Din păcate, autorul nu tratează teza decisivă a filozofiei platonice tîrzii, conform căreia ideile sînt numere.

Scanned with OKEN Scanner

dificultăţi. Ei nu au acordat o importanţă decisivă identităţii absolute a unităţilor, cu ajutorul cărora se făcea numărarea. Totuşi, nici conceptul „unu“ şi nici conceptele celorlalte numere nu au fost considerate de ei ca atributele unor lucruri oarecare efectiv numărate, ci esenţe de sine stătătoare *(ousiai*, „substanţe“*)*; această concepţie este combătută de Aristotel, care invocă argumentul că, privind chiar o melodie ca un „număr“ de sferturi de ton *(dieseis)*, unitatea nu constituie aici o entitate de sine stătătoare, ci apare ca un sfert de ton. Şi în mod analog, şi în alte cazuri [16]. Numărul, conform concepţiei lui Aristotel, *se asociază* lucrurilor, dar nu se află *în* lucrurile înseşi. În ciuda acestei distincţii, Stagiritul se apropie aici, totuşi, de concepţia pitagoreică a numărului. Ceea ce poartă aici denumirea de „număr“ *(arithmos)* este în mod evident un „număr numărat“ — număr conceput ca rezultat al operaţiei de numărare — mai precis o multitudine sau o colecţie de natură discretă (compusă din elemente distincte), care poate fi caracterizată printr-unul sau mai multe numere. Expresia verbală adecvată a acestor „numere“ nu ar fi „doi, trei, patru, ...“, ci mai curînd poate „dublu, triplu, cvadruplu,...“ („pereche, triplet, cvadruplet,...“). Trebuie să reamintim aici etimologia cuvîntului *arithmos*. Termenul provine din verbul *ararisko* „a îmbina“, „a asambla“, şi are deci, într-adevăr, semnificaţia genuină de „ansamblu“. La Aristotel mai pot fi detectate urmele sensibile ale acestui caracter concret, structurat al conceptului original de număr, care mai este legat de colecţii determinate de obiecte şi nu poate fi încă extins şi aplicat oriunde[17]. Iar aceasta, într-o măsură încă şi mai mare, la pitagoreici şi la Platon!

Privită din punctul de vedere al acestui concept de număr concret, genuin, chiar primitiv, teza pitagoreică va deveni mult mai inteligibilă. Termenul de „număr“ are semnificaţia unei structuri determinate, exprimabilă

---

[16] *Met.*, I 1, 1053 b, 32—1054 a, 9; cf. *Met.*, N 1, 1087 b, 33 — 1088 a, 14.

[17] Vezi K. Menninger, *Zahlwort und Ziffer*, ed. a 2-a, Göttingen, 1958.

Scanned with OKEN Scanner

pe cale aritmetică, structură imanentă însești lucrurilor și care constituie chiar esența acestora. Conform concepției pitagoreice, această „structură", acest ansamblu nu este însuși concretul, ci mai curînd un schelet *de sine stătător* care suportă lucrurile, menținîndu-le într-un fel pe dinăuntru. Ne putem face o idee despre această concepție, pe baza teoriei elementelor expusă în dialogul *Timaios* al lui Platon. În acest dialog Platon vorbește prin gura pitagoreicului Timaios (indiferent dacă este vorba de un personaj istoric sau nu), ca și cum, într-o măsură oarecare, el însuși ar fi un pitagoreic.

Atomii celor patru elemente sînt reprezentați sub forma unor poliedre regulate: focul apare ca tetraedru, aerul ca octaedru, apa ca icosaedru, iar atomul pămîntului sub formă de cub. Primele trei corpuri — ale căror fețe sînt triunghiuri congruente echilaterale — sînt considerate ca fiind compuse în mod efectiv din aceste fețe triunghiulare, așadar corpuri tridimensionale compuse din suprafețe cu două dimensiuni! Desigur, o asemenea concepție a constituit o piatră de scandal pentru Aristotel, care a supus teoria platoniciană a elementelor naturale unei critici severe (*De coelo*, III, 1). Materia reală este corporală și grea, în timp ce suprafețele fiind obiecte pur matematice, deci, după Aristotel, configurații pur abstracte, nu sînt nici corporale și nici grele. Dar Aristotel nu a înțeles concepția profundă a lui Platon. Intenția lui Platon a fost aceea de a lămuri însăși esența materiei și nu compunerea unor corpuri materiale mai mari din bucățele indvizibile, mai mici. Conceptul de materie încă nu a îmbrăcat la Platon starea solidă, definitivă a „substanței" ireductibile, ca la Aristotel, așadar un concept care nu mai poate fi explicat prin nimic altceva. Dacă am vrea să redăm conceptul platonician al materiei cu un termen actual, am oscila între termenii „spațiu", „substanță", „cîmp" (de forțe).

În acest context sînt interesante rezultatele cercetărilor lui E. M. Bruins[18], privind transformările „fizice" și „chimice" ale elementelor platonice. Între altele, apare

[18] *La Chimie du Timée*, în „Revue de Métaphysique et de Morale", 56, pp. 269—282.

necesar ca interioarele poliedrelor să fie considerate goale, pentru că suma feţelor se menţine constantă în timpul transformărilor (analog sumei maselor, în chimia lui Lavoisier), nu însă suma volumelor (în unele cazuri, volumele se reduc la jumătate).

Se operează, aşadar — şi, conform structurii teoriei, nici nu se poate opera cu altceva — exclusiv cu feţele poliedrelor şi cu asamblarea poliedrelor din aceste feţe bidimensionale, iar în aceste consideraţii joacă un anumit rol şi mărimea relativă a unghiurilor pe care le formează feţele între ele. Grosimea feţelor este însă riguros nulă, ceea ce demonstrează caracterul pur matematic al acestor atomi poliedrali. Înseşi aceste poliedre nu sînt corpuri materiale, nici în sensul conceptului aristotelic al substanţei şi nici în sensul fizicii clasice moderne; ele constituie totuşi materia celor patru elemente în stadiul în care ele sînt prevăzute cu o formă. În esenţă, locul central îl ocupă în această concepţie numărul feţelor elementare ale poliedrelor: avem de-a face, aşadar, cu o viziune de esenţă pitagoreică a elementelor, chiar dacă într-o formă prelucrată de Platon şi de matematicienii Academiei (înainte de toate, desigur, de Theaitetos).

W. Heisenberg, unul din fizicienii contemporani de frunte, spune despre triunghiurile elementare ale lui Platon[19]: „Triunghiurile înseşi nu sînt materiale, ele sînt forme matematice pure..., iar întrebarea cu privire la cauza existenţei particulelor elementare este transferată de Platon în domeniul matematicii. Particulele elementare posedă forma pe care le-o atribuie Platon, deoarece această formă este din punct de vedere matematic cea mai frumoasă şi cea mai simplă. Fundamentul ultim al fenomenelor nu este, aşadar, materia, ci legea matematică, simetria, forma matematică". Şi Heisenberg subordonează acestei tendinţe de simetrie chiar şi propria sa metodă de interpretare teoretică a particulelor elementare, în ciuda situaţiei complet deosebite a fizicii actuale faţă de cea din epoca lui Platon. O dată cu descoperirea cuantelor

[19] *Die Plancksche Entdeckung und die philosophischen Grundlagen der Atomlehre*; conferinţă ţinută la Berlin în ziua de 25 aprilie 1958, apărută în „Naturwissenschaften", nr. 10, 1958, pp. 227—234.

de energie de către Planck, ar fi reapărut în științele naturii, conform opiniei lui Heisenberg, aceeași idee platoniciană, în virtutea căreia „la baza structurii atomice a materiei stă, în ultimă instanță, o lege matematică, o simetrie matematică“[20].

Și, într-adevăr, ecuația fundamentală a fizicii particulelor elementare, propusă de Heisenberg, este caracterizată de el însuși prin aceea că satisface un mare număr de condiții de simetrie. Desigur, nu mai este vorba de simetria spațială deosebit de intuitivă a corpurilor platoniciene (de altfel, simetria se bazează, la rîndul ei, pe grupul abstract al operațiilor de congruență, care pot fi efectuate cu aceste corpuri), pentru că, în cazul ecuației lui Heisenberg, timpul joacă un rol esențial. Dar, oricum

---

[20] Se ridică întrebarea: oare triunghiurile elementare ale corpurilor platoniciene sînt triunghiuri matematice exacte, deci configurații ideale, sau nu? Este însă dificil a da un răspuns la această întrebare, în baza textului dialogului *Timaios*. Pe de o parte, teoria elementelor naturale se află într-o oarecare opoziție cu alte afirmații matematice ale dialogului, cu construcția „spiritului cosmic“. Și asta, pentru că acest spirit este conceput ca o schemă imaterială sau ca un model imaterial, și abia copia sa constituie universul vizibil, cu ecuatorul ceresc, cu planul eclipticii și cu traiectoriile planetare. Distanța dintre spiritul cosmic și universul vizibil permite ca, în principiu, să putem da socoteală de abaterile dintre mișcările efectiv observate și schema ideală a mișcării corpurilor cerești. În schimb, ultimele particule componente ale „elementelor“ sînt concepute într-o manieră mai pitagoreică decît cele ale lucrurilor, și anume ca veritabile particule elementare invizibile ale așa-numitor „elemente“ vizibile: foc, aer, apă, pămînt. Desigur, ele sînt inaccesibile ochiului uman numai din cauza micimii lor, dar se credea, probabil, că un zeu ar putea, totuși, să le observe. Pe de altă parte, este îndoielnic dacă triunghiurile elementare necorporale, bidimensionale, pot fi considerate ca fiind obiecte materiale. Exprimată în termeni moderni, întrebarea se pune în felul următor: oare aceste triunghiuri elementare trebuie considerate ca fiind „reale“ sau, dimpotrivă, ca „ireale“? La aceasta se referă și critica lui Aristotel (*De coelo*, III, 1). Într-adevăr, Platon vorbește de „împărăția eternă a spațiului“ (*chōra*: *Tim.*, 52 ab), dar el își pune tot acolo întrebarea, dacă această proprietate a „eternității“ nu trebuie oare considerată ca o particularitate ce decurge în mod necesar din exactitatea matematică. Problema ar necesita o cercetare mai aprofundată. În orice caz, aceste pagini din *Timaios* dau impresia netă că (în mod special în teoria sa cu privire la elementele componente ale lucrurilor) Platon a cochetat foarte deschis cu pitagoreismul.

ar fi, legile fizice, avînd chiar față de grupurile de transformări un caracter mult mai cuprinzător, „sînt și ele, pînă la urmă și în esență, numai forme matematice abstracte, care se aplică însă tocmai spațiului și timpului".

Nu putem omite să atragem atenția, în acest loc, și în contextul celor precedente, asupra cercetărilor lui Andreas Speiser privind analiza matematică a simetriei în arta ornamentală, în arhitectură și muzică[21]. Acest matematician de seamă, competent și ca filozof, spune despre arta compoziției muzicale: „După cum orice ecuație algebrică își are metafizica ei proprie — grupul asociat acestei ecuații, și a cărui cunoaștere ne dezvăluie secretele intime ale ecuației — tot așa opera de artă are și ea metafizica sa proprie, și anume o structură de simetrie, a cărei cunoaștere permite compunerea unor piese frumoase într-un număr oricît de mare, iar găsirea, inventarea unor asemenea configurații constituie adevăratul rezultat al creației artistice. Ar fi sarcina cercetării științifice să determine, în cazul fiecărei bucăți în parte, structura internă a acesteia, în toate conexiunile ei... Se poate presupune că există compoziții muzicale, de exemplu printre fugile lui Bach, în care fiecare sunet este determinat, încît nu mai rămîne decît tonalitatea ca unic grad de libertate. Foarte probabil că opera artistică de calitate este caracterizată printr-o proprietate cu caracter minimal: ea este bucata cea mai simplă posibilă în cazul structurii de simetrie pe care o conține".

Și, reîntorcîndu-ne la Heisenberg, găsim la el următoarea teză: „...prin importanța fundamentală pe care o au proprietățile de simetrie, orice încercare de a stabili o teorie a particulelor elementare păstrează... un caracter specific închis. Există structuri legate între ele într-o măsură atît de mare și într-un mod atît de esențial, încît nu mai poate fi efectuată nicăieri nici o schimbare, fără a pune sub semn de întrebare toate interdependențele. Ne putem referi cu această ocazie la ornamentele artistice în formă de bandă ale moscheilor arabe, în care se

[21] A. Speiser, *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* ed. a III-a, Berlin, 1937; *Die mathematische Denkweise*, ed. a 2-a, Basel, 1945, p. 34. Vezi și H. Weyl, *Symmetrie*, Basel-Stuttgart, 1955.

realizează simultan un număr atît de mare de simetrii, încît nu poate fi schimbată nici o placă fără a introduce o răsturnare decisivă a tuturor legăturilor luate în ansamblul lor...". Pasajul citat aici conține o aluzie directă la analiza ornamentelor, efectuată de Speiser pe un număr mare de cazuri concrete. Printre cele mai complicate și cele mai bogate în conexiuni sînt ferestrele unor moschei arabe.

Întreaga manieră în care Speiser și Heisenberg privesc lucrurile este, în esență, o viziune pitagoreică. Pentru că ideea fundamentală a pitagoreismului, în virtutea căreia esența lucrurilor se reduce la „număr", la anumite legi exprimabile cu ajutorul relațiilor numerice se reduce în ultimă instanță la teza că legile cărora li se supun lucrurile existente coincid cu simetria interioară sau cu „armonia" realizată de legile aritmetice, care exprimă relații între numere. Astfel se întinde un arc cu o largă deschidere, de la pitagoreici și pitagorizantul Platon, pînă la cercetările moderne.

4

Dar să nu credem că Platon ar fi fost în întregime pitagoreic. El a fost și a rămas, chiar și în epoca sa tîrzie, un filozof *critic*. În *Timaios*, el insistă în repetate rînduri asupra faptului că redă doar un „mit" și nu pretinde să i se acorde acestui mit valoare de adevăr. Mai mult chiar, în *Statul*, cartea VII, el se pronunță deosebit de clar cu privire la caracterul „ideal" al adevăratei astronomii. Pozițiile și mișcările corpurilor cerești, stabilite prin observații directe, se abat de la pozițiile și mișcările adevărate, pentru că cele accesibile observației au loc în domeniul „vizibilului", deci într-un domeniu imperfect prin esența lui. Firmamentul vizibil trebuie comparat cu un model geometric excelent executat, pe care un bun cunoscător al geometriei să-l recunoască drept o operă măiastră a meșteșugului, model pe care acesta totuși nu-l va studia cu intenția serioasă de a stabili cu ajutorul său adevărata esență a egalului și a dublului.

Scanned with OKEN Scanner

Această paralelă, atît de ciudată pentru noi, între un model artificial efectuat în scopuri didactice şi natura fenomenelor astronomice, urmărite pe cale de observaţie, reapare şi la Aristotel (*Met.*, B 2, 997 b, 34—998 a, 6). Acesta o reia fără să reflecteze asupra ei. Oricum, ea este pomenită aici (în cartea aporetică B, a *Metafizicii*), chiar dacă numai sub forma unei teze supuse cîntăririi critice. El spune acolo că astronomia nu poate trata despre mărimile accesibile simţurilor şi nici despre cerul ce se întinde deasupra capului nostru, pentru că liniile accesibile simţurilor noastre nu sînt identice cu acelea despre care ne vorbeşte geometrul. Un inel material nu atinge o riglă numai într-un singur punct (acest fapt fusese deja relevat de Protagora); de asemenea, nici mişcările şi traiectoriile spirale ale planetelor pe cer nu sînt identice cu acelea despre care vorbeşte astronomul.

Noi sîntem înclinaţi să refuzăm paralela amintită şi nu înclinăm spre identificarea modelelor artificial construite de om, în vederea unor demonstraţii, cu fenomenele ce au loc în natură. În privinţa concepţiei platonice, va trebui să admitem, de asemenea, că aceasta (deşi a exercitat o influenţă îndelungată) nu putea fi favorabilă dezvoltării ştiinţelor exacte ale naturii. Dar o latură pozitivă a concepţiei platonice poate fi relevată cînd ea este privită ca o expresie a spiritului *criticist* al lui Platon. Din acest punct de vedere, se poate afirma că, în concepţia platonică, noţiunea de model îşi găseşte o expresie clară pentru domeniul ştiinţelor naturii care utilizează matematica. Căci şi noi vorbim în fizica teoretică modernă de „model", utilizînd acelaşi termen ca şi pentru denumirea modelului introdus de Platon cu un scop ilustrativ, demonstrativ. Fizica modernă îşi construieşte un „model" pentru un grup determinat de fenomene, îl elaborează în abstract, ca după aceea să stabilească acele aspecte ale modelului care sînt redate de fenomenele efectiv observate, să stabilească în ce măsură „se adevereşte" — conform unei formule antice — modelul în domeniul natural la care se referă.

Dintr-o perspectivă modernă, atitudinea aristotelică faţă de problema noastră este edificatoare, înainte de

Scanned with OKEN Scanner

toate, prin luciditatea ei. Obiectele matematice sînt generate prin intermediul „abstracției" *(aphairesis)*. Aici apare acest concept pentru întîia oară. Ceea ce există în sine, într-o stare neseparată, este privit de matematician ca ceva separat; de exemplu, în cazul unei bile de bronz matematicianul consideră numai forma sferică spațială, iar în cazul unei rigle, numai linia dreaptă; analog, în cazul unei raze de lumină. Există totuși ceva ce rămîne neclarificat în această teorie, și anume: abstracția singură nu este suficientă pentru a explica apariția obiectelor geometrice, pentru că în definirea lor (aproape întotdeauna) intervine în mod necesar și o anumită idealizare. O roată nu are forma exactă a cercului, rigla nu este riguros dreaptă. Desigur, Aristotel este pe deplin conștient de toate acestea și le și amintește în anumite ocazii. Dar el deplasează problema pe planul logic. Totul depinde de ipotezele inițiale de la care pornește geometrul în demonstrarea teoremelor sale, și linia despre care el acceptă că ar fi lungă de un picior, în realitate, nu trebuie să fie atîta; din această neconcordanță nu rezultă nici o eroare pentru matematician. Această teză este într-o oarecare concordanță cu punctul de vedere modern, numit adesea „convenționalist". Totuși, este îndoielnic dacă în interpretarea textului aristotelic se poate merge atît de departe. Într-adevăr, în toate celelalte declarații, punctul de vedere ontologic se află întotdeauna și într-un mod foarte clar pe primul plan.

Nu este cazul să ne pierdem aici în relatări cu caracter istoric. Prin cele precedente, am urmărit doar să atragem atenția asupra faptului că cercul de probleme care ne preocupă aici nu se prezintă într-o formă prea simplă nici chiar în antichitate, și că chiar în această epocă apare o interferență a unor tendințe multiple, tendințe care în decursul timpului vor reapărea mereu, într-o formă sau alta. Bunăoară, teza pitagoreică nu este acceptată în expresia ei genuină, și totuși în diverse variante și sub diverse aspecte ea continuă să-și exercite influența, devenind prin aceasta unul din ingredientele cele mai importante ale gîndirii matematice, pînă în zilele noastre.

Scanned with OKEN Scanner

II

Științele naturii

1

Se afirmă adesea că științele exacte reprezintă, dacă nu o consecință, cel puțin stadiul premergător, ba chiar o anticipare a tehnicii. Se spune[1], de exemplu, că științele epocii moderne, care au apărut ca un rezultat al aplicării matematicii în cercetarea naturii, ar fi un produs al capitalismului timpuriu. Aceste științe matematizate emerg, conform tezei citate, dintr-o imagine a lumii în care procesul muncii umane, așa cum se manifestă acesta în meșteșuguri și în producția bunurilor materiale, este ridicat la rangul unei scheme generale pentru fenomenele naturale și tocmai de aceasta, și prin aceasta, ar determina într-un mod decisiv activitatea de cunoaștere a naturii. Astfel determinată, voința de a cunoaște ar conține în sine implicit și voința de a stăpîni și de a supune natura. Formulele matematice ale fizicii teoretice ar fi „pus stăpînire" astfel pe un domeniu determinat al fenomenelor naturale, fără însă a le „înțelege"; mai mult, chiar fără dorința și voința de a le înțelege. Iar cînd Nietzsche spune că orice intenție de a cunoaște conține în sine o picătură de cruzime, și dacă un autor neoromantic al zilelor noastre deplînge faptul că tehnica modernă ar fi „înjosit Marea Mamă la rangul unei servitoare", aceștia urmează, în esență, aceeași linie de conduită. În sfîrșit, însuși Heidegger a vorbit despre o sfidare reciprocă, despre o „poziție" contradictorie a naturii, ba chiar a existenței și a omului

[1] Max Scheler, *Erkenntnis und Arbeit*, în colecția „Die Wissensformen und die Gesellschaft", Leipzig, 1926.

în era actuală a atomului, idee asupra căreia va trebui să revenim.

Dar, se pune întrebarea dacă această concepție, devenită între timp o opinie aproape general acceptată, este oare într-adevăr corectă? Se pare că este suficientă însăși pronunțarea cuvîntului „astronomie", pentru a o dărîma. Nu este oare astronomia o știință exactă, o știință a naturii îmbibată cu matematică? Și a constituit oare această știință vreodată o premisă a tehnicii? Cu stelele de pe cer nu se pot face încă nici astăzi experiențe, în cel mai bun caz pot fi supuse cercetării radiațiile lor. Fenomenele cerești pot fi supuse numai unor observații pasive, ele nu pot fi supuse însă schimbărilor voite, în vederea unor experiențe. Galilei a putut să experimenteze foarte bine cu bilele sale, avînd doar „greutăți alese de el însuși" (după o expresie foarte plastică a lui Kant), lăsîndu-le să cadă de-a lungul unui plan înclinat, dar stelele nu se lasă manipulate după bunul nostru plac.

Pe deasupra, astronomia este, din punct de vedere istoric, o știință deosebit de veche. Numai în forma ei exactă, bazată pe procedee matematice, astronomia poate fi urmărită în trecut în cercul de cultură asiro-babilonean pînă în secolul al VIII-lea î.e.n. Începînd de la jumătatea secolului respectiv, eclipsele au fost urmărite prin observații sistematice. Cea mai veche, citată de Claudiu Ptolemeu, a avut loc în anul 746 î.e.n. Primul sistem al lumii, bazat pe observații și conceput în stilul științelor exacte, a fost elaborat în secolul al IV-lea î.e.n. de grecul Eudoxiu (teoria sferelor omocentrice); un alt sistem, analog, a fost elaborat în același secol, poate de Heraclide Ponticul[2]. Epiciclurile și excentricitatea devin cunoscute cel tîrziu în secolul al III-lea î.e.n. (Apollonius din Perga). În epoca elenistică s-a dezvoltat atît în lumea greacă, cît și în sferele culturii babilonene tîrzii, o astronomie subtilă, bazată pe observații și pe calcule matematice. Documen-

[2] După părerea lui B.L. van der Waerden, teoria epiciclurilor este pomenită deja în dialogul *Timaios* al lui Platon, și aplicată pentru cazul planetelor Mercur și Venus (vezi *Die Astronomie der Pythagoreer*, în „Verhandl. d.K. Nederl. Akad. v. Wetensch.", Afd. Natuurk. 1 R. Deel XX, nr. 1, Amsterdam, 1951, p. 45 și urm.).

tele acestei astronomii ne-au fost păstrate înainte de toate în scrierile lui Claudiu Ptolemeu, iar în privința ramurii babilonene, în numeroase texte cuneiforme. Textele păstrate în aceste documente reprezintă în ansamblul lor, fără nici o îndoială, o știință exactă, de o înaltă ținută bazată pe o gîndire matematică, ceea ce se poate vedea și din faptul că rezultatele pe care le-au furnizat aceste texte mai erau pe deplin valabile pentru Copernic. Abia lucrarea *Astronomia nova*, a lui Kepler (1609), va marca întorsătura decisivă către ceva nou, îngăduind astfel făurirea ulterioară a mecanicii cerești de către Newton.

Kepler însuși apare încă în fața noastră sub un aspect dublu; lucrările *Mysterium cosmographicum* și *Harmonices Mundi* stau alături de *Astronomia nova:* pe de o parte pitagoreism, pe de altă parte cercetare exactă empirico-matematică. Constituie o curiozitate faptul că legea a treia a lui Kepler (un produs secundar al cărții *Harmonices Mundi)*, împreună și legată de legea lui Huyghens cu privire la accelerația centrifugală, a devenit de-a dreptul punctul de emergență al legii gravitației universale stabilite de Newton[3]. Huyghens însuși utilizează analogia dintre accelerația centrifugală și accelerația corpului în cădere liberă, așa cum au fost acestea determinate de Galilei. Astfel, ideile lui Galilei și Huyghens, împreună cu cele ale lui Kepler se integrează în teoria

---

[3] Legea a treia a lui Kepler stabilește că cuburile axelor mari (adică aproximativ cuburile (r^3) ale razelor vectoare) ale traiectoriilor planetare se află între ele în același raport ca și pătratele timpurilor de revoluție (T^2). Legea lui Huyghens afirmă că accelerația centrifugală (a) este direct proporțională cu pătratul vitezei de revoluție (c^2), și invers proporțională cu raza vectoare (r). Viteza de revoluție este însă proporțională cu raportul circumferinței $2\pi r$ și cu timpul de revoluție T (în esență, deci, cu r/T, 2π fiind o constantă, de care se poate face abstracție în această relație. — *N.T.*). De aici rezultă că accelerația centrifugală a este proporțională cu c^2/r, adică cu $(r^2/T^2)/r$, sau, efectuînd simplificările, cu r/T^2. Dar din legea a treia a lui Kepler rezultă că T^2 este proporțional cu r^3. În consecință, accelerația centrifugală a va fi proporțională cu raportul r/r^3, respectiv cu $1/r^2$. Or, tocmai aceasta constituie conținutul esențial al legii gravitației universale, în formularea lui Newton, în măsura în care ea este considerată sub un aspect pur cinematic.

Scanned with OKEN Scanner

lui Newton pentru a fundamenta prin aceasta mecanica cerească[4].

În această confluență a celor două curente de idei, dintre care unul aparține macanicii terestre iar celălalt izvorăște din legile mișcării planetelor, apare ceva nou: identificarea legilor de mișcare a corpurilor terestre cu cele ale mișcării corpurilor cerești, depășirea prăpastiei dintre Pămînt și cer, prăpastie ridicată de tradiția clasică antico-medievală, în opoziție cu atomismul lui Democrit și Epicur, care erau privite cu neîncredere, ca suspecte. Această mecanică cerească, deși concepută ca știință a fenomenelor care pot doar să fie observate dar nu și influențate de om, este totuși, în principiu, identică cu mecanica corpurilor terestre pe care le manipulăm după bunul nostru plac. Domeniul fenomenelor terestre este stăpînit de legi naturale nu mai puțin exacte ca fenomenele cerești. Știința clasică a Occidentului — știința matematizată a naturii — își face apariția o dată cu această descoperire. Desigur, ideea unității legilor naturii în toate sferele este astăzi din nou depășită prin aceea că în domeniul corpurilor mari (în cazul extrem acestea sînt chiar stelele) sînt valabile legi exacte, în timp ce în domeniul particulelor mici pot fi stabilite numai dependențe statistice avînd un anumit caracter de lege (teoria cuantelor). În ciuda tuturor afirmațiilor astăzi atît de frecvent repetate, trecerea de la mecanica clasică a lui Newton la fizica modernă, începînd aproximativ cu anul 1900, nu a însemnat nici pe departe efectuarea unui pas atît de mare în direcția unui nou mod de gîndire, ca apariția mecanicii cerești în secolul al XVII-lea (concepută de Newton în jurul anului 1666, dar făcută publică abia în 1687).

---

[4] Trebuie să mai adăugăm, la cele spuse aici, că Newton a extins teoria lui Huyghens de la mișcarea circulară la cea eliptică, considerînd în locul accelerației centrifugale — în cazul circular — o accelerație îndreptată către unul din focarele elipsei (în conformitate cu prima și a doua lege ale lui Kepler); abia prin aceasta au primit legile lui Kepler o interpretare exactă și a devenit astfel posibilă rezolvarea de către Newton a așa-numitei probleme a celor două corpuri.

Scanned with OKEN Scanner

Întrebarea de ce nu a elaborat antichitatea clasică o știință exactă a fenomenelor naturii nu poate fi înlăturată printr-un răspuns simplu. O oarecare lumină apare în această problemă, desigur o lumină parțială, care pune în evidență numai una din fațetele ei, dacă luăm în considerare faptul că știința antică nu cunoștea *experimentul analitic*.

Grecii s-au dovedit a fi adesea observatori fini și gînditori rafinați, dar au manifestat în mod vizibil o teamă specifică față de orice disecare a fenomenului natural prin intervenții și manipulații artificiale adecvate, care ar fi dus la distrugerea fenomenului în forma sa originală, văzut ca un întreg indivizibil. Tot ceea ce a putut fi adunat prin observarea directă a naturii libere și tot ce a rezultat din activitățile preștiințifice pe timp de pace și război (din meșteșugurile manuale și din tehnica militară) a fost luat în considerare în scopul edificării unei științe „libere". Dar aparate speciale destinate unor scopuri de cercetare nu au fost construite de loc sau aproape de loc.

Descrierea fermecătoare pe care o dă Empedocle (B 100, 8—21) unei scene în care o fetiță se joacă cu un mecanism de evacuat apa *(klepshydra*, de fapt „hoț de apă") constituie un exemplu tipic pentru un așa-zis „experiment" din epoca veche a științei grecești. Clepsidra era o unealtă antică de uz casnic (cîteva exemplare ale acestui instrument ne-au fost păstrate) care servea la scoaterea apei din vasele prea mari și incomode, care nu puteau fi ridicate sau răsturnate cu ușurință. „Experiența" executată de fata care se joacă servește ca model (ceea ce este exprimat în poemul epic al lui Empedocle în forma unei parabole homerice) pentru reprezentarea unui fenomen (pretins) fiziologic. Dar (oricum ar fi) aici este vorba de relatarea unor observații al căror obiect a fost jocul unei fetițe naive, și nicidecum de o cercetare efectuată cu intenții științifice.

Situații analoge pot fi întîlnite adesea la gînditorii presocratici. Astfel, homoiomeriile lui Anaxagora sînt explicate cu ajutorul amestecului de culori, la vopsit, în

cadrul operațiilor meșteșugărești (*Anaxagora*, B 10, partea a II-a, 37,7—10; B 21, partea a II-a, 43, 8—12, în *Fragmente der Vorsokratiker*, ed. Diels-Kranz; cu privire la clepsidră, *ibidem*, fragm. A 69). Acestei categorii de experiențe îi aparțin și cercetările acustice — în parte reale, în parte prezumtive — ale vechilor pitagoreici, ca acelea ale lui Hippasos (12.13), cu discuri de grosimi diferite și cu vase umplute cu cantități diferite de lichid. Abia în antichitatea tîrzie apar, ocazional, experiențe cu caracter sistematic, de exemplu pe tărîmul opticii, unde Claudiu Ptolemeu supune unei asemenea cercetări viziunea binoculară, precum și fenomenul refracției luminii. Dar nici în aceste cazuri nu se procedează vreodată la disocierea unui fenomen natural dat, în componentele sale, cum ar fi, bunăoară, descompunerea luminii albe în componentele sale colorate.

Din punct de vedere principial este însă și mai important faptul că descompunerea și compunerea forțelor cu ajutorul paralelogramului forțelor — procedeu ce ne este astăzi atît de familiar — au fost complet necunoscute în antichitate: se pare că procedeul descompunerii forțelor ar fi fost utilizat pentru întîia oară de Stevin, la sfîrșitul secolului al XVI-lea, cu scopul de a înțelege cum se mențin corpurile în echilibru pe un plan înclinat. Grecii nu au reușit să determine condițiile acestui echilibru pe calea calculului (vezi, cu privire la încercările nereușite de a rezolva această problemă, Pappus, *Coll. math.*, VIII, 8—9). Soluția problemei a fost dată pentru prima dată de un elev al lui Iordanus Nemorarius, este adevărat însă că nu prin descompunerea forțelor, ci prin aplicarea principiului deplasărilor virtuale. În decursul secolului al XVII-lea, principiul paralelogramului forțelor este aplicat într-un mod cu totul general la rezolvarea celor mai felurite probleme, și însăși dinamica lui Newton ar fi fost de neînchipuit fără acest principiu.

Nu amănuntele istorice sau anumite experiențe cu caracter particular împreună cu explicarea lor ne interesează aici, ci principiul fundamental al descompunerii fenomenelor naturale în elementele lor, elemente din care fenomenele inițiale pot fi pe urmă reconstituite, în general (deși nu fără excepție), prin simpla superpoziție a

Scanned with OKEN Scanner

componentelor. Acest principiu al analizei, al descompunerii în componente elementare își găsește expresia filozofică la Descartes, în *Regulae ad directionem ingenii* (1629). Acest principiu se află într-o relație strînsă cu ideea unei *Mathesis universalis*, care se folosește, la rîndul ei, de *Algebra speciosa* (calculul literal inventat de Viète și perfecționat de Descartes) și poate fi aplicată numerelor și mărimilor de orice fel. Principiul amintit stă de asemenea într-o strînsă legătură cu idealul cartezian al matematizării fizicii, în care — după stabilirea unor axiome — totul trebuie obținut prin intermediul calculului algebric. Astfel devine matematica lui Descartes modelul metodologic de urmat. Într-adevăr, aparține esenței gîndirii matematice faptul că în procedeele acesteia, fiecare pas în parte este de o nemijlocită, ba chiar de o banală evidență; configurațiile și raționamentele ce se obțin prin legarea treptată a acestor etape devin din ce în ce mai complicate și întortocheate, așa încît ele pot fi cu greu cuprinse cu privirea. Dar caracterul lor științific se bazează tocmai pe această complexitate structurată.

Constituie, așadar, o trăsătură profundă a științelor exacte, o caracteristică ce are pentru ele o importanță fundamentală cu începere din secolul al XVII-lea faptul că fenomenele preștiințifice pe care le întîlnim obișnuit sînt descompuse în elementele lor, adesea invizibile, și sînt apoi din nou reconstituite din acestea, procedeu care conține în același timp în sine critica percepției senzoriale naive. (Să ne gîndim, bunăoară, la ipoteza naivă a lui Aristotel și a altora, conform căreia viteza este proporțională cu forța care acționează asupra mobilului, ipoteză care contravine legii fundamentale a fizicii clasice moderne, conform căreia *accelerația* vitezei este proporțională cu forța ce acționează asupra mobilului!) Tocmai această trăsătură constructivă imprimă fizicii moderne un caracter matematic.

Din intenția analitică, despre care am vorbit în cele precedente, decurge apoi tendința de a construi aparate și de a le aplica în vederea unor observații exacte. Dar această tendință s-a manifestat în antichitate numai pe tărîmul astronomiei (care a avut nevoie de măsurarea

Scanned with OKEN Scanner

exactă a unghiurilor) și într-o oarecare măsură în domeniul geodeziei (aparatele construite de Heron și descrise în lucrarea sa, *Dioptra*). În schimb, aparatele „pneumatice" ale lui Heron, adesea foarte ingenios construite, sînt totuși simple jucării, „apariții miraculoase ce se mișcă de la sine" (cum se exprimă Aristotel, în *Met.*, A 2, p. 983 a, 14); ele servesc la producerea unui efect de surpriză în public, dar în nici un caz nu constituie mijloace de cercetare științifică. Omul antichității a găsit „modelele" de care se servea în reprezentarea fenomenelor naturale în natură sau în activitatea meșteșugărească; exceptînd modelele astronomice, așa-numitele „sfere", el nu le-a confecționat în nici un caz în mod special, din intenția realizării unor scopuri științifice.

Construirea unor instalații științifice efectiv aplicabile apare în mod nemijlocit aproximativ în secolul al XVII-lea. Să ne gîndim la aparate cum sînt telescopul, microscopul, ceasul cu pendul, la vidul produs de Torricelli și la pompa de aer, cu care Otto v. Guericke a obținut efecte importante în privința mărimii forțelor obținute. Desigur, experiențele exacte duse la capăt într-un mod într-adevăr conștient nu au fost încă prea frecvente; Blaise Pascal trebuie pomenit totuși în această privință ca un model.

O asemenea strădanie pentru realizarea exactității presupune însă interesul pentru o descriere exactă a unei situații cu ajutorul numerelor și aceasta va determina o orientare cu totul nouă a scopurilor fixate cercetării. Astăzi ni se pare o evidență faptul că „marea carte a naturii este scrisă în limba matematicii" (Galilei). La vremea ei, această afirmație era foarte nouă și cu totul potrivnică tradiției antico-medievale, făcînd abstracție de astronomie, care și-a ridicat însă și ea brusc exactitatea datelor de observație prin contribuțiile lui Tycho Brahe (de la 10′, la 1′ și la abateri chiar și mai mici!).

Nu este o întîmplare faptul că același Galilei, pentru care natura vorbește în limba matematicii, recomandă aceeași *metodo risolutivo e compositivo* pentru care pledează și Descartes. Aceasta înseamnă că modul specific matematic de gîndire nu este, într-un anumit sens, altceva decît metoda analitică, motiv pentru care termenul

Scanned with OKEN Scanner

de „analiză“ cîștigă o justificare mai profundă pentru matematicile superioare care apar în secolul al XVII-lea.

Valabilitatea acestei constatări nu este știrbită întru nimic de faptul că în decursul secolului al XVIII-lea au fost găsite procedee matematice care permit stabilirea unor legi cu un caracter integral și în aparență teleologic: ne gîndim aici la așa-numitele principii extremale. Este vorba de calculul variațional și, în mod concret, de problema determinării curbei brahistocrone (curbă de-a lungul căreia un corp în cădere liberă cade cel mai repede), problemă care i-a preocupat pe Leibniz, pe Iohann și Jakob Bernoulli, de principiul minimal căruia i se supune traiectoria razei de lumină (Fermat), de principiul minimal al lui Leibniz-Maupertuis. Pentru Leibniz aceste principii extremale, de maxim și minim, posedă o importanță fundamentală, de natură filozofică și teologică: Dumnezeu, care a creat lumea cea mai bună dintre toate lumile bune posibile, înfăptuiește această operă maximală cu mijloace minimale, rezolvă toate problemele pe calea cea mai economică, în calitatea sa de arhitect perfect și suprem al universului. Mai tîrziu, s-a stabilit că tuturor acestor principii extremale le sînt asociate sisteme de ecuații diferențiale, echivalente cu principiile înseși (așa-numitele ecuații ale lui Lagrange); aceste sisteme nu mai dispun de nici un caracter integral și cu atît mai puțin teleologic. Și, la rîndul lor, principiile extremale cu caracter integral sînt în cea mai mare parte încărcate cu echivoc, întrucît oferă atît soluții maximale cît și minimale, deci oferă atît soluțiile „cele mai bune“, cît și soluțiile „cele mai proaste“. Cu toate acestea, din punctul de vedere al istoriei spiritului este remarcabil felul în care Leibniz a intenționat să împace, prin intermediul acestor principii, tradiția filozofico-teologică a evului mediu cu știința exactă matematizată a evului modern.

Rămîne însă un fapt stabilit că între experimentul analitic și analiza matematică există o legătură strînsă și că în ambele își găsește deopotrivă expresia aceeași tendință constructivă a noilor științe ale naturii.

Poate tocmai acest procedeu analitic al științelor noi, bazate pe aplicarea matematicii, a fost acela care a provocat ideea de „sfidare“ a naturii de către omul care recurge la această metodă — metodă care apare ca o consecință necesară, dacă nu chiar ca premisa tehnicii moderne. M. Heidegger a accentuat[5] în repetate rînduri că natura și omul se „opun“ reciproc*, ceea ce însă nu este privit de el ca o manifestare a orbirii și a aroganței umane, cu consecințele tragice ale unor asemenea atitudini, ci interpretat ca „*Seins-Geschick*“ (destin propriu, destin existențial) al epocii noastre cosmice, deci al unei ere precis determinate.

Cu toate acestea, nu este ușor de stabilit unde anume începe această „sfidare“ a naturii. De exemplu, Heidegger nu consideră că utilizarea energiei vîntului în navigația cu pînze sau în morile de vînt, și nici exploatarea solului într-o gospodărie țărănească ar constitui o asemenea sfidare. În schimb, el privește (așa pare, cel puțin) ca atare mașina cu aburi, agregatele electrice, îngrășarea artificială a solului, cu întreaga chimie tehnică de mari proporții care stă în spatele ei. Dar, se pune întrebarea: în ce constă deosebirea principială dintre acestea?

În secolul al XVII-lea a fost construită, din dispoziția lui Ludovic al XIV-lea, uzina hidraulică de la Marly pe Sena, care prin intermediul unor pompe acționate cu roți hidraulice a ridicat de pe malul Senei, la o anumită înălțime, o cantitate de apă suficientă pentru alimentarea fîntînilor arteziene din parcul de la Versailles. A constituit oare această instalație extinsă, costisitoare și

---

[5] Vezi M. Heidegger, *Vorträge und Aufsätze*, Pfullingen, 1954, p. 13 și urm.; *Die Frage nach der Technik*, 1953, p. 163 și urm.; *Das Ding*, 1950; *Identität und Differenz*, Pfullingen, 1957, p. 25 și urm.

* El vorbește de „*geschickliche Ereignis*“, joc de cuvinte cu rezonanță triplă, greu de tradus: semnificația imediată a termenului ar fi „un eveniment — produs al iscusinței“, dar el insinuează simultan și sensul latent, mai profund, de „eveniment produs al destinului“, și, în fine, rezonanța fonetică a termenului duce pînă la o confuzie, aproape totală, cu expresia „eveniment istoric“. — *N.T.*

Scanned with OKEN Scanner

mult admirată la vremea ei, o sfidare a naturii? Eficiența ei a avut un grad deosebit de scăzut. S-a calculat că toată producția energetică a acestei impunătoare mașinării ar putea fi produsă astăzi de motorul unui camion mijlociu. S-ar putea spune: mașina de la Marly a reprezentat doar o foarte slabă sfidare a naturii, în ciuda dimensiunilor sale. În schimb, un aparat tehnic modern, hipercomplex, bunăoară un avion cu reacție sau o rachetă spațială care poate plasa un satelit artificial pe o orbită circulară în jurul Pămîntului, sau, în fine, o mașină electronică de calcul (despre care mulți mai afirmă că ar fi capabilă de gîndire independentă), toate acestea exercită un efect de teroare și constituie într-adevăr o „sfidare". Și sînt mulți care nici nu se miră că aroganța pe care o manifestă inventatorii unor asemenea instrumente diabolice are un efect funest asupra omenirii. Chiar dacă nu se ia în considerare uzul și abuzul militar al unor asemenea invenții, tot mai rămîn de temut consecințele sociologice neintenționate ale tehnicii supraevoluate și este de netăgăduit că aceste consecințe s-au și făcut simțite. Oamenii își pierd libertatea, atît de ancvoios cîștigată în decursul istoriei, pentru a fi înrolați într-un colectiv, pentru a funcționa ca „rotițe" ale unei monstruoase mașinării sociale.

Putem adăuga însă, la cele precedente, că nu am avut posibilitatea de a alege. Creșterea puternică a populației în Europa, în decursul secolului al XIX-lea, a impus dezvoltarea tehnică forțată. În caz contrar, am fi alunecat la stadiul scăzut al unor regiuni suprapopulate din Asia, nivel considerat pe bună dreptate ca insuportabil. Dar se poate aduce împotriva celor precedente obiecția că tocmai prin aceste efecte se manifestă faptul că aceste evenimente poartă în sine un destin („*Seins-Geschick*" — existență cu caracter de destin).

Dacă ne întrebăm cum și din ce motive s-a ajuns la această situație, va trebui neapărat să atragem atenția asupra rolului jucat în această evoluție de modul de gîndire matematic. Înainte de toate — așa pare cel puțin — cercetarea analitică a fenomenelor naturii permite descompunerea lor în procese simple, care pot fi mult mai ușor cuprinse cu vederea din punctul de vedere al de-

Scanned with OKEN Scanner

pendențelor cauzale; aceeași metodă permite, de asemenea, construirea unor dispozitive tehnice de o eficiență incomparabilă cu a celor de care a fost capabilă vechea cultură. A fost nevoie de dărîmarea și desființarea modului de a gîndi în scheme de forme integrale, pentru a da posibilitatea forțelor naturii să acționeze conform voinței omului.

În al doilea rînd, modul de gîndire matematic nu se reduce numai la metoda analitică, ci conține și o latură cu caracter sintetic, și anume una caracterizată printr-un constructivism consecvent. Procedeul fundamental al acestei modalități constructive este calculul bazat pe reguli determinate, care nu admite excepții, procedeu de o consecvență necruțătoare. După ce regulile unui anumit calcul au fost alese în mod liber, ele devin absolut obligatorii. „*Beim erstem sind wir frei, beim zweiten sind wir Knechte*“*. Dacă o dată ne-am încredințat lui, atunci procedeul de calcul ales ne duce mai departe la construcții și raționamente mereu noi.

În al treilea rînd, la toate acestea se mai adaugă ideile cu caracter extremal. A obține cît se poate de mult, cu mijloace cît se poate de puține, iată, după Leibniz, legea care stă la baza nu numai a acțiunii umane, dar chiar și la baza celei divine. Din acest principiu decurge, între altele, tendința spre o permanentă perfecționare a aparaturii tehnice. „*Das Bessere ist der Feind des Guten*“ (Ceea ce este mai bun este dușman pentru ceea ce este bun), sună o maximă cunoscută. Această tendință nu este în sine chiar atît de evidentă cum ni se pare ea nouă astăzi. Antichitatea a fost, de exemplu, foarte conservativă în materie tehnică, iar progrese de mare anvergură — cum ar fi, bunăoară, unele schimbări radicale în domeniul mijloacelor de circulație, de proporția celor produse în epoca modernă de calea ferată și de aviație — nu au existat de loc. În tehnica militară au apărut ocazional inovații uluitoare, ca, de exemplu, elefanții de război, dar nu s-a ajuns niciodată la asemenea schimbări profunde cum au fost acelea produse de descoperirea prafului de pușcă, la sfîrșitul evului mediu.

* „La primul pas ești liber, dar slugă la al doilea“ — citat din *Faust*. — *N.T.*

Scanned with OKEN Scanner

Apariția subită a descoperirilor noi, într-un număr atît de mare de domenii, constituie în sine ceva ce ne uimește. Nu ne gîndim în mod unilateral numai la „domesticirea" unor forțe puternice ale naturii cu ajutorul mașinilor energetice; în epoca aceea nici nu au existat încă mașini energetice eficiente (deși Huyghens elaborase proiectul unei mașini pe bază de pulbere, care a anticipat principiul motorului cu explozie internă, apărut mai tîrziu). Ne referim însă la descoperirea lunetei și a microscopului, bazate pe principii atît de simple. O simplă suprapunere a unor lentile, ale căror efecte erau în sine de mult cunoscute (lentile de mărit au existat încă în antichitate, iar ochelarii au apărut cel tîrziu în secolul al XV-lea), a deschis accesul către lumi cu totul noi, către un macro-și microcosm înainte complet necunoscute. (Luneta a fost descoperită de opticieni olandezi necunoscuți; Galilei a aplicat-o imediat în scopurile observației astronomice și teoria ei a fost puțin după aceea stabilită de Kepler. Trebuie să observăm, totuși, că Kepler nu a reușit să găsească legea corectă a refracției luminii — legea sinusului — ci a dat doar o expresie aproximativă, foarte bună însă, pentru unghiuri mici.)

Și acum, se poate pune din nou întrebarea: constituie oare luneta și microscopul (spre deosebire de lentilă, lupă și ochelari) o sfidare a naturii, în timp ce lentila, lupa și ochelarii nu? Sau poate linia de demarcație va fi trasată abia de telescopul gigant de pe Muntele Palomar, sau poate chiar mai devreme, de instrumentul mare construit de F. W. Herschell?

Spre a stabili dacă avem sau nu de-a face cu ceea ce numim „sfidare" a naturii, am fi poate tentați să vedem criteriul decisiv în aceea că, în cazul afirmativ, instrumentele noi îngăduie accesul către lumi cu totul noi, despre a căror existență nimeni nu a visat pînă atunci, așa cum mica lunetă a lui Galilei a adus sateliții planetei Jupiter în cîmpul vizibilității. Dar nu ar intra în acest domeniu utilizarea nautică a lunetei, deoarece ea nu a adus nici un fel de schimbări radicale în navigație. Cu mai mult drept ar putea avea asemenea pretenții cronometrul de bord, a cărui construire a devenit posibilă

Scanned with OKEN Scanner

în urma cercetărilor lui Huyghens cu privire la instrumentele de măsurat timpul.

Sau să luăm, de exemplu, domeniul mașinilor energetice: aplicarea primelor mașini cu aburi pentru evacuarea apei din minele engleze nu a constituit încă actul decisiv, deoarece prin aceasta a fost doar substituit efortul animal sau uman prin echivalentul său mecanic. Dar primele locomotive cu aburi au adus, în schimb, o transformare radicală a mijloacelor de locomoție, precum și o creștere puternică a vitezei de circulație — efecte care pot fi comparate numai cu acelea produse de introducerea în zilele noastre a circulației aeriene între continente. Tot așa a transformat și descoperirea aburului întreaga tehnică a navigației. Ambele au schimbat obiceiuri și stări milenare, considerate, în general, ca fiind imuabile.

Cu aceste exemple devine acum într-adevăr mai clar ce înțelege Heidegger prin sfidarea *reciprocă* a omului și a naturii. Naturii i-au fost smulse secrete nebănuite pînă acum de nimeni, au fost eliberate înfricoșătoarele sale forțe ascunse (este suficient să ne gîndim doar la energia electrică și nucleară), iar toate acestea exercită apoi o influență nestăvilită asupra omului, asupra obiceiurilor sale, asupra stării sale sociale. Nu că natura ar fi vrut să se răzbune, și nici că ar fi vorba de o *vină fatală*, dar în toate acestea apare o împletire de elemente care se manifestă ca și cum ar fi vorba de un destin ineluctabil.

Nu se poate nega apoi că în toată evoluția aceasta, gîndirea de tip matematic joacă un rol decisiv. Iar aceasta pentru că abia ea este aceea care permite o asemenea „sfidare". În cele ce urmează, vom încerca să arătăm cum, în mod paradoxal, fenomenul a avut loc tocmai printr-un act de renunțare.

4

Francis Bacon a formulat următorul aforism: „*Natura non nisi parendo vincitur*"*. Sensul aforismului poate fi expri-

* Natura nu poate fi învinsă decît prin supunere. — *N.T.*

mat prin următoarea expresie, puțin diferită: „*Naturam renuntiando vincimus*“: învingem natura prin renunțare. Procedeul, de o eficiență decisivă, dar de un caracter paradoxal, care ne ajută să răpim secretele naturii și să punem stăpînire pe forțele sale, este următorul: să renunțăm la cunoașterea „esenței“ sale.

Această idee apare încă la Galilei, și anume într-o formă absolut conștientă. În prima perioadă a activității sale, la Pisa, el a mai lucrat în întregime ca un adept al terminiștilor parizieni (orientare scolastică din secolul al XIV-lea; printre cei mai de seamă reprezentanți ai acestui curent se numără Buridan și Oresme). Abia la Padova, începînd cu anul 1592, a rupt el cu această tradițională linie medievală, iar această ruptură s-a manifestat printr-o renunțare la cercetarea *cauzelor* căderii libere și ale mișcării, limitîndu-se la studiul felului în care *decurge* fenomenul. Deși renunțarea la cercetarea cauzei are, aici, în mod mărturisit un caracter provizoriu, ea constituie în sine, totuși, un rezultat cu caracter decisiv. Într-adevăr, această modalitate paradoxală de a pătrunde mai adînc în tainele naturii decît s-a făcut înainte, renunțînd tocmai la obligația de a da un răspuns la întrebările care i-au fost puse din toate timpurile (este suficient să ne gîndim la cele patru cauze ale lui Aristotel), s-a adeverit a fi, în cele ce au urmat, o procedură mereu corectă. Și anume, această metodă a favorizat mai întîi fizica teoretică și apoi practica experimentală. La o cercetare mai atentă, acest fapt apare ca un lucru deosebit de surprinzător, deși nu inexplicabil.

Aici intră în joc și modalitatea specifică a gîndirii de tip matematic. Pentru că „renunțarea“ de care vorbim își manifestă efectele tocmai într-o limitare a numărului enunțurilor posibile ce pot fi formulate cu privire la natură. Această limitare poate fi precizată, în multe cazuri, pe cale matematică, și anume atunci cînd este vorba de imposibilitatea unor tipuri determinate de enunțuri. În consecință, în asemenea cazuri vor fi limitate, de asemenea, și posibilitățile structurale privind forma expresiei matematice a legilor naturii. Această formă va putea fi determinată atunci cu mai multă precizie, iar în caz extrem va fi posibilă chiar exprimarea ei integrală.

Scanned with OKEN Scanner

Nu se poate deci afirma că mijloacele matematice ar permite numai descrierea modului în care decurge fenomenul, dar ar fi incapabile de a da socoteală despre cauzele acestuia, ci mai curînd putem spune că actul în sine negativ al renunțării la a cunoaște anumite aspecte ale fenomenului poate fi transformat, prin aplicarea metodelor matematice, într-un fapt pozitiv.

Aceste relații ciudate devin deosebit de clare dacă luăm în considerare diversele „teorii ale relativității" care au apărut în decursul istoriei lungi a fizicii. Aceste teorii enunță mereu că anumite lucruri nu pot fi determinate în mod „absolut", că, principial, în privința lor nu pot fi formulate nici un fel de propoziții absolute. De aici rezultă apoi că legile fundamentale care guvernează natura trebuie să fie invariante față de anumite grupuri de transformări. Dar aceasta înseamnă că în structura internă a legilor naturii, respectiv în formulele matematice care le exprimă, trebuie să fie prezente relații corespunzătoare de simetrie. Or, această concluzie ne duce din nou înapoi la teza fundamentală a filozofiei pitagoreice, prezentată la începutul considerațiilor noastre din lucrarea de față.

Această constatare poate fi verificată chiar în cazul celui mai vechi exemplu: raționamentele lui Anaximandru cu privire la relativizarea conceptelor „sus" și „jos". Pămîntul planează, conform concepției sale, în centrul universului (precum am văzut mai sus) și expresia „în sus" are în aceste condiții semnificația „a se depărta de Pămînt", iar expresia „în jos" înseamnă „a se apropia de Pămînt" — în ambele cazuri, desigur, în direcție radială. Aceste determinări rămîn în mod evident neschimbate și în cazul cînd admitem că Pămîntul se învîrtește în jurul unei axe de rotație ce trece prin centrul său.

Această concepție ne este astăzi atît de familiară, încît ne dăm seama foarte rar că ea nu reprezintă de loc un fapt evident de la sine. Ea nu a fost împărtășită în antichitate de gînditori atît de remarcabili cum au fost Democrit și Epicur. Aceștia vorbeau de o „cădere" a atomilor într-un sens absolut, iar ființele antipodale mai erau considerate chiar și în timpul Renașterii — cel puțin în scrierile populare — ca niște fantastici monștri cefalopozi antropoidali, care trăiesc la marginea lumii.

Scanned with OKEN Scanner

Anaximandru a stabilit, aşadar, o „teorie a relativităţii“ pentru perechea de concepte „sus — jos“, dîndu-le totodată şi o definiţie invariantă faţă de rotaţiile arbitrare ale Pămîntului (rotaţii în care centrul Pămîntului rămîne fix). Totodată, universul este dotat cu o structură de simetrie radială dintr-o perspectivă terestră.

Un alt exemplu ar fi relativitatea poziţiei şi a mişcării spaţiale. Aici însă nu putem intra în amănuntele acestui cerc de probleme, ale căror începuturi trebuie căutate încă în antichitate (ea apare pentru prima dată la Zenon din Eleea). Amintim în această ordine de idei doar principiul relativităţii galileene (un principiu căruia Galilei însuşi nu i-a dat încă o formulare ireproşabilă; mai tîrziu, Huyghens l-a utilizat însă într-un mod suveran în cadrul demonstraţiei date de el legilor impulsului), apoi discuţia celebră dintre Leibniz şi Clarke (care vorbea de fapt în locul lui Newton), precum şi afirmaţiile de mai tîrziu ale lui Euler şi Kant.

În disputa dintre Leibniz şi Clarke nu este vorba de invarianţa legilor mecanicii faţă de mişcarea uniformă rectilinie a întregului sistem material considerat — în această privinţă acordul a fost deplin — ci (între altele) de o chestiune care astăzi are pentru noi o rezonanţă aproape grotescă: oare Dumnezeu ar fi putut plasa sau ar mai putea plasa şi astăzi lumea reală într-un alt loc al spaţiului absolut şi vid, decît acela în care se află ea acum? Leibniz considera întrebarea însăşi ca fiind absurdă. Este lipsit de sens, susţine el, să se vorbească despre o poziţie absolută a universului în spaţiul vid. Clarke (cu punctul de vedere al lui Newton) este însă de altă părere.

Cu această ocazie putem constata din nou că ideile lui Leibniz conţin germenele unei teorii a relativităţii poziţiei spaţiale. Toate poziţiile, toate locurile sînt echivalente, ba sînt chiar indiscernabile în spaţiul vid, şi, în consecinţă, legile naturii sînt invariante faţă de schimbarea poziţiei spaţiale în care ele acţionează. Această schimbare trebuie înţeleasă, desigur, ca o schimbare abstractă a poziţiei spaţiale şi nu ca o mişcare concretă care are loc în timp.

Relativitatea mişcării propriu-zise constituie astăzi o problemă atît de des discutată, încît trebuie să presupunem

Scanned with OKEN Scanner

că ea este binecunoscută. Legile mecanicii lui Newton sînt invariante față de mișcările uniforme rectilinii, dar nu față de mișcările de rotație (din cauză că la aceste mișcări apar forțe centrifuge). Totuși „rotația absolută" în raport cu spațiul vid nu poate fi reprezentată într-un mod concret. Dificultatea care apare aici a fost mereu discutată de marile spirite, începînd încă din secolul al XVII-lea (de către Huyghens și Leibniz), apoi mai tîrziu, în secolul al XVIII-lea (de către Euler și Kant) și în secolul al XIX-lea (între alții, de către Mach și Andrade), fără să se fi obținut o soluție satisfăcătoare. O modalitate radical diferită de a pune întreaga problematică a apărut pentru prima dată în secolul al XX-lea, o dată cu „teoria generală a relativității", elaborată de Einstein, care a formulat totodată pe cale matematică și condițiile de invarianță corespunzătoare pentru legile naturii. Dar în privința acestei cuprinzătoare teorii nu a fost rostit încă ultimul cuvînt.

Nici cu acestea însă nu am ajuns încă la sfîrșitul dezvoltării. În domeniul fizicii atomice a ieșit la iveală că procesul cunoașterii naturii conține și alte limitări, de un gen diferit (care nu pot fi considerate neapărat ca teorii cu caracter relativist). Așa-numitele relații de nedeterminare ale lui Heisenberg exclud posibilitatea de a determina cu precizie și simultan poziția spațială și viteza (impulsul) unei particule elementare. De aici rezultă apoi concepția dual ă a unei asemenea „particule", ca fiind undă și corpuscul. La rîndul lor, și aceste relații de incertitudine introduc anumite limitări în privința legilor fundamentale ale naturii; ele conduc la condiții determinate de simetrie, cărora li se supun ecuațiile diferențiale ca expresii ale acestor legi.

Alte evenimente științifice asemănătoare au avut loc recent. Amintim doar introducerea unei „lungimi elementare" (de 10^{-13} cm), sub care nu mai este posibilă nici o măsurare, astfel încît structurile de o dimensiune inferioară trebuie considerate ca fiind din punct de vedere fizic oarecum inexistente[6]. Ca și în celelalte cazuri, tot așa și în cazul de față

[6] Am mai putea aminti și așa-numita „vîrstă cosmică" (egală, după unii, cu circa 4—5, după alții cu 8 miliarde de ani). Înaintea acestui interval de timp nu ar fi existat, după părerea unor fizicieni,

Scanned with OKEN Scanner

limitarea impusă cunoașterii duce la o „condiție de simetrie“ privind ultimele ecuații fundamentale (vezi, în această privință, cele spuse în capitolul I cu privire la „formula cosmică“ a lui Heisenberg-Pauli).

Nu avem intenția de a da aici aprecieri critice asupra tuturor acestor teorii. Astăzi încă nu știm ce parte a acestora își va păstra valabilitatea într-o perioadă mai tîrzie a istoriei științei și ce parte va trebui să fie considerată ca depășită, datorită altor concepții ce vor apărea în viitor. Am vrut doar să scoatem în evidență o trăsătură cu adevărat remarcabilă ce le este tuturor comună, și anume că orice negare a unei posibilități concrete de cunoaștere duce la consecința pozitivă a stabilirii unor condiții de simetrie pentru expresia matematică a legilor naturii, iar prin aceasta la determinarea lor mai completă. Dar aceasta înseamnă că aspectul de contingență a legilor naturii, invocat atît de des, cedează în fața unei necesități de un anumit gen, care ar putea fi denumită necesitate *pitagoreică*. Universul apare ca un cristal și nu ca o „floare“, cum se spune în frumoasele versuri ale lui Platen despre imaginea lumii, la Schelling[7].

5

Am ajuns astfel la o altă problemă: problema realității.

Nu este sarcina noastră să dăm aici o tratare exhaustivă problemei „realității“, în toată extinderea ei. Nici nu putem intra în amănuntele disputei străvechi dintre realism și idealism, mai cu seamă pentru că această dispută pare să se concentreze în prezent cu precădere asupra problemei „existenței independente“ a altor indivizi umani („a celui-

---

nu numai universul — și deci nici un fel de eveniment — dar nici măcar timpul. O opinie analogă cu cea a lui Augustin (care se dovedește aici a fi tributarul dialogului *Timaios* al lui Platon), conform căreia timpul ar fi fost creat o dată cu universul însuși.

[7] Versurile se găsesc într-un sonet dedicat lui Schelling:

„Wenn wir zerstückelt nur die Welt empfangen,
Siehst du sie ganz, wie von des Berges Spitze;
Was wir zerpflückt mit unserm armen Witze,
Das ist als Blume vor dir aufgegangen“.

Scanned with OKEN Scanner

lalt eu"). Pentru noi, întreaga problematică a realității prezintă interes numai în măsura în care joacă un rol (oarecare) în științele exacte. În cele ce urmează, nu intenționăm să pornim deci de la modalitatea cu totul generală, „filozofică" a problemei, ci vom avea în vedere întreaga problematică, în felul necăutat în care apare ea spontan în dezvoltarea fizicii (în cel mai larg sens al termenului).

Precum am mai văzut, științele exacte își au originea în izvoare diferite. Astronomia, prima știință exactă, era preocupată de la început de obiecte — stelele — care nu se găsesc în imediata vecinătate a omului, și care tocmai de aceea nici nu posedă acel caracter familiar al realității de care dispune multitudinea de lucruri cu care avem de-a face în viața cotidiană. Nu le putem manipula ca pe niște scaune și mese, pălării și mantale, pluguri și bărci, săbii și scuturi. De asemenea, dimensiunile și distanțele corpurilor cerești nu pot fi de loc sau pot fi numai foarte dificil comparate cu dimensiunile corpurilor obișnuite ce ne înconjură și cu distanțele pe care sîntem obișnuiți să le învingem în viața de toate zilele.

Pe scurt: obiectele care alcătuiesc domeniul de cercetare al astronomiei — Soarele, Luna și stelele — sînt fenomene pure și ne sînt familiare numai ca atare, ele fiind accesibile numai ochilor, dar nu și mîinilor noastre. În opoziție cu acestea stau obiectele anturajului nostru familiar, tot ceea ce este la îndemîna noastră sau, chiar dacă nu este, ar putea fi cu certitudine, precum și tot ceea ce „există" și este la dispoziția noastră sub forma unui lucru rezervat sau poate ca un vînat ce ne așteaptă.

Deși toate aceste obiecte sînt mult mai apropiate de noi, ele au devenit accesibile științelor exacte abia mai tîrziu și numai în urma învingerii unor dificultăți însemnate. Antichitatea clasică a obținut rezultate propriu-zis numai pe tărîmul staticii și într-o oarecare măsură în domeniul opticii și al acusticii (aici, de fapt numai în teoria armoniei muzicale). „Fizica" lui Aristotel era potrivnică cercetărilor exacte cu caracter cantitativ. Însăși categoria cantității juca la el un rol cu totul subordonat pe lîngă celelalte categorii, ca: substanță, calitate, relație. Lumea sublunară nu era stăpînită de legi naturale riguroase și precise, ci numai de anumite reguli, insuficient determinate, cu un caracter mai mult

Scanned with OKEN Scanner

statistic, exprimate în formulări de genul următor: „așa cum se întîmplă de multe ori sau mai întotdeauna". Abia în secolul al XVII-lea devine fizica o știință universală, culminînd cu mecanica lui Newton, care își extindea valabilitatea, în egală măsură, atît asupra fenomenelor pămîntești cît și asupra celor cerești. Abia acum, și prin aceasta, pătrunde modul de gîndire de tip matematic în întregul univers, ca obiect al unei cercetări de acum înainte exacte.

Iar în ceea ce privește teoria cunoașterii, în această privință antichitatea nu a ajuns niciodată la elaborarea unui punct de vedere idealist, în sensul modern al termenului. Nici filozofia eleaților, nici teoria lui Platon, care căuta să interpreteze lumea accesibilă simțurilor ca un domeniu de fenomene propriu-zis inexistent, și, de asemenea, nici scepticismul epocii elenistice nu pot fi considerate pe deplin idealiste*. Abia Descartes a fost primul care începe celebrele sale meditații cu privire la îndoiala metodică, cu o teză subiectivistă. Dar, pînă la urmă, și el termină ca un realist. Berkeley este primul idealist autentic, prin enunțarea tezei „*esse est percipi*" (a fi înseamnă a percepe); dar atitudinea sa față de științele exacte ale epocii este numai parțial negativă. În lucrarea sa *De motu*, el combate teoria spațiului absolut, a lui Newton, dintr-un punct de vedere empirist, iar în cartea sa *The Analyst*, critică vehement calculul fluxiunilor, elaborat tot de Newton.

Dar să ne întoarcem la științele exacte, concentrîndu-ne atenția asupra conceptului de realitate care stă la baza acestora.

Am văzut mai sus că în antichitate tocmai acel domeniu al obiectelor „pămîntești" s-a sustras cercetării exacte, care ne este atît de familiar și a cărui realitate nu a fost niciodată pusă la îndoială de filozofia peripatetică, stoică sau epicureică. (Existau, desigur, și în antichitate anumite concepții sceptice. Ele nu prezintă însă interes pentru problematica noastră.) Domeniul fenomenelor astronomice, unicul

---

* Becker pare să identifice noțiunea de idealism numai cu aspectul său *subiectiv*, cum apare în epoca modernă, de exemplu la Berkeley. Cele două mari orientări din istoria gîndirii filozofice însă — idealismul și materialismul — apar încă în gîndirea antică. — *N.R.*

Scanned with OKEN Scanner

care era supus unui tratament cu caracter exact, era în schimb problematic tocmai în privința modalității care trebuie atribuită realității sale. Pentru Platon și Aristotel, stelele sînt un fel de ființe divine, avînd o „substanță" diferită de cea terestră. Desigur, au existat și păreri opuse acestei concepții, ca acelea ale lui Anaxagora, Democrit, Epicur. Dar ele nu au putut fi exprimate într-o formă matematică suficient de avansată, și tocmai de aceea nici nu au reprezentat vreodată o concurență serioasă[8].

Modalitatea ontică a realității stelelor a rămas deci — judecată cu luciditate — îndoielnică. De aici a urmat, ca efect, apariția a două orientări în astronomia antică și în cea medievală tîrzie. Înainte de toate, o orientare matematică, respectiv cinematică, care s-a limitat la o analiză a traiectoriilor planetare complicate observate pe cer, încercînd să le descompună pe acestea într-o sumă de mișcări circulare uniforme (analog descompunerii unei funcții într-o serie trigonometrică[9]), fără să se intereseze prea mult de mecanis-

---

[8] B.L. van der Waerden a explicat în mod convingător de ce concepția lui Platon și Aristotel (care se trage, în ultimă instanță, din filozofia pitagoreică) îi este superioară, dintr-un punct de vedere pur matematic, concepției lui Anaxagora-Democrit (*Die Astronomie der Pythagoreer*, pp. 13—15). Anaxagora descompune mișcarea anuală a Soarelui (și, în mod analog, și mișcarea Lunii) într-o componentă paralelă cu ecuatorul ceresc, iar într-altă paralelă, cu axa lumii. Desigur, din punct de vedere cinematic, această operație este permisă; ea este însă ineficientă din punct de vedere astronomic, pentru că cele două componente sînt interpretate din punct de vedere dinamic în două moduri complet diferite: prima, prin mișcarea de rotație a eterului, a doua, prin rezistența pe care o opune aerul rece al nordului și care obligă Soarele să-și „schimbe" mersul, adică să se întoarcă în proximitatea ecuatorului. Rămîne însă neexplicat felul cum sînt reglate succesiv aceste componente, și anume faptul că Soarele se reîntoarce după un an nu numai la același cerc nordic, ci și la aceleași constelații. Dimpotrivă, concepția pitagoreică redă în mod corect evenimentele atunci cînd susține că Soarele posedă pe ecliptică o mișcare proprie, orientată dinspre vest spre est, deci în sens opus mișcării stelelor fixe (rotația firmamentului).

[9] Alături de acestea, au mai existat și metodele „liniare" ale babilonenilor (din epoca elenistică), metode care au fost utilizate și de astronomi greci, ca, de exemplu, în procedeele *Anaphorikos* al lui Hypsicle și în *Tetrabiblos* al lui Ptolemeu. Aceste procedee seamănă într-o oarecare măsură cu metoda noastră actuală de dezvoltare în serii de puteri.

Scanned with OKEN Scanner

mul fizic care imprimă acestor mişcări aspectul lor specific. În al doilea rînd, a apărut o orientare cu un caracter fizic mai pronunţat, care şi-a propus să explice cauzele şi mecanismul fizic al fenomenelor descrise de matematicieni pe o cale pur cinematică. Într-un cuvînt, această orientare şi-a propus o cercetare a fenomenelor dintr-un punct de vedere dinamic. Prima metodă este urmată de Claudiu Ptolemeu în *Almagest*, iar a doua este aplicată de acelaşi autor în *Hypothesis planetarum*.

Această metodă dublă a jucat un rol însemnat în evul mediu, dar încă în secolele XVI — XVII ea a permis să se vorbească în astronomie despre „ipoteze", în sensul primei dintre metodele descrise, ipoteze cu ajutorul cărora pot fi efectuate apoi calculele tabelelor planetare şi a căror realitate nu se cerea să fie garantată. Astfel, Osiander, editorul postum al operei fundamentale a lui Copernic, *De revolutionibus*, a interpretat sistemul copernician heliocentric drept o simplă ipoteză. Tycho Brahe, Kepler şi Galilei au vorbit, în schimb, despre sisteme cărora le-au atribuit o semnificaţie fizică adevărată. Acest dublu punct de vedere joacă un anumit rol şi în procesul ce i-a fost intentat lui Galilei. Cardinalul Bellarmin a sfătuit în zadar acceptarea unei interpretări ipotetice[10]. Dezvoltatea ulterioară a acestor concepţii, care a culminat prin mecanica cerească a lui Newton, ne arată însă că orientarea „ipotetică" a corespuns mai bine viziunii de ansamblu a spiritului epocii de atunci.

Discuţia se va desfăşura de acum înainte în jurul problemei realităţii corpurilor cereşti şi a mişcărilor acestora. Distincţia principială dintre lumea cerească şi cea terestră a fost în mod definitiv depăşită. Stelele, la fel ca şi Pămîntul, sînt alcătuite din aceeaşi substanţă materială, aceleaşi legi mecanice sînt valabile pentru toate corpurile. Apare însă o nouă dificultate privind natura forţelor care determină

[10] Ne permitem aici să recomandăm cititorului prezentarea acestor evenimente făcută de E. J. Dijksterhuis, în cartea sa *Die Mechanisierung des Weltbildes*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1956, pp. 69—77 (antichitatea); 236 şi urm. 239—243 (evul mediu); 304 şi urm. (Renaşterea); 320 (Copernic); 334 şi urm. (Tycho Brahe); 337 şi urm . (Kepler, vezi mai ales pp. 343—349); 424—429 (Galilei). Vezi, de asemenea, O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, ed. a 2-a, Providence, Rhode Island, 1957, pp. 204—206.

Scanned with OKEN Scanner

mișcarea planetelor de-a lungul traiectoriilor lor și datorită cărora corpurile grele cad pe Pămînt. Este vorba de forța centrifugală și de cea gravitațională (respectiv, forța greutății terestre). Forța centrifugală nu este decît o forță aparentă, care acționează ca un efect al inerției substanței materiale, precum a demonstrat-o Huyghens. Gravitația este însă o forță care acționează instantaneu, la distanță, și care este introdusă ca atare de Newton în *Principiile* sale. Natura forței gravitaționale a rămas însă un mister, și nici unul dintre contemporanii lui Newton (de exemplu, Huyghens și Leibniz) și nici chiar Newton însuși nu au fost satisfăcuți de teza privind gravitația concepută ca o forță cu acțiune la distanță, cu toată utilitatea matematică a acestei concepții, utilitate demonstrată într-o manieră atît de strălucită în cercetările de mare diversitate ale lui Newton. Huyghens a fost, fără îndoială, unicul care a elaborat o teorie adevărată a acțiunii apropiate a forței gravitaționale, sau cel puțin a forței de greutate, teorie bazată pe considerații cantitative, care, ca și teoria premergătoare a vîrtejurilor, elaborată de Descartes (neajunsă însă la o formă matematică), a dedus gravitația din forțele centrifuge produse de o substanță materială fină, ce se învîrtește cu o mare viteză în jurul Pămîntului (analog, și în jurul celorlalte corpuri cerești).

Nu putem intra aici în amănunte. Ne interesează însă să prezentăm ideile directoare ale acestei teorii care concepe gravitația ca o forță cu acțiune apropiată, precum și cele ale teoriei luminii, elaborată tot de Huyghens (această teorie concepe lumina ca o mișcare ondulatorie longitudinală și se bazează pe așa-numitul „principiu al lui Huyghens“ care explică propagarea undelor luminoase, păstrîndu-și valabilitatea și în zilele noastre). Huyghens reduce fenomenele de „explicat“ la presiunea și ciocnirea unor corpuri. (După încercările nereușite ale lui Descartes, Huyghens a determinat legile corecte ale impulsului cu ajutorul „principiului relativității galileene“[11]). Noțiunile de presiune și impuls erau familiare tuturor, din practica de toate zilele, și părea că ele nici nu mai au nevoie de vreo explicație ulterioară.

[11] Vezi E. J. Dijksterhuis, *op. cit.*, p. 461 și urm. (teoria turbionară a mișcării planetare, a lui Descartes), 514-518 (teoria luminii și a gravitației, a lui Huyghens), 416—420 (demonstrarea legilor impulsului, dată de Huyghens).

Scanned with OKEN Scanner

Părea ca și cum ar fi posibilă construirea unui model mecanic pentru fenomenele gravitaționale, recent încă inexplicabile, model care să nu mai conțină nimic misterios.

Aceste teorii, bazate pe acțiunea apropiată, au lucrat cu diverse feluri de corpuscule și de aceea a apărut problema privind modalitatea ontică a realității acestor particule, iar prin aceasta, a materiei însăși. S-a ajuns astfel, începînd cu Galilei și Descartes și în urma reluării unor idei ce proveneau de la atomiștii antici[12], la stabilirea a două feluri de calități, denumite mai tîrziu, de către Locke, calități „primare" și calități „secundare". Numărul, mărimea, forma și mișcarea reprezintă calități primare, iar culoarea, sunetul, mirosul, gustul sînt calități secundare. Numai calitățile primare sînt susceptibile de unele determinări exacte. Ele reprezintă totodată elementul propriu-zis real și obiectiv al lucrurilor materiale. În schimb, calitățile secundare reprezintă doar un fel de iluzii ale simțurilor, condiționate de structura organelor noastre de simț și sînt tocmai de aceea în întregime subiective. Din punctul de vedere al acestei duble distincții, tendința mecanicistă extremă a secolului al XVII-lea (reprezentată înainte de toate de Descartes și de „cartezianul" Huyghens) a cîștigat valoarea unui fel de fundament filozofic. Această fizică, de un mecanicism extrem, era preocupată exclusiv de calitățile primare și a făcut abstracție de orice concept de altă proveniență. Tocmai de aceea a ignorat ea și caracterul primar și fundamental al conceptului de forță. Conceptul de forță nu părea să fi fost format pe o cale independentă de senzația subiectivă a încordării musculare. Tot astfel erau interzise și conceptele fundamentale ale metafizicii aristotelice: cele de potență și act, precum și calitățile oculte ale scolasticilor.

Oricît a căutat Newton să se elibereze de tradițiile medievale, încercarea sa nu a reușit în mod complet, precum o demonstrează critica fundamentelor mecanicii sale, efectuată dintr-un punct de vedere modern. Dar, în ceea ce-l privește, el însuși a găsit că teoriile contemporane bazate pe un mecanicism extrem, ca aceea a lui Huyghens, sînt nesatisfăcătoare, deoarece ele lucrează cu corpuscule inventate ad-hoc, și care sînt inaccesibile observației, încît, pentru a „explica"

[12] Vezi E. J. Dijksterhuis, *op. cit.*, pp. 519—533.

Scanned with OKEN Scanner

fenomenele, se recurgea mereu la ipoteze foarte complicate, construite în mod conștient tocmai în acest scop. În *Scholium generale*, care încheie *Principiile* sale, Newton le-a opus acestora celebra sa teză „*Hypotheses non fingo*“ (Nu născocesc ipoteze), teză care făcea aluzie tocmai la ipotezele de inspirație carteziană. El a declarat încă la începutul *Principiilor* sale (cartea I, def. 8) că va considera forțele gravitaționale care produc accelerația ca „forțe nu în sensul fizic, ci în cel matematic“ al termenului. Nu stă în intenția sa de a explica „modul și felul efectului “ sau „cauza fizică a acestuia“; se mulțumește cu deducerea mișcărilor planetare, accesibile observației, precum și cu calculul mareelor pe baza legii generale a gravitației, enunțată de el.

Cu toate acestea, conceptul de forță stabilit de Newton nu are un caracter „nominalist“: produsul dintre masă și accelerație nu a fost considerat de el drept o *definiție* a conceptului de forță. El a calificat[13] drept o „absurditate“ ipoteza unei forțe de atracție cu acțiune imediată la distanță, dar a admis, firește, că nici el nu dispune de o explicație a fenomenului gravitației.

Iată însă că dezvoltarea de proporții uriașe a fizicii secolelor XVIII și XIX s-a desfășurat apoi pe această bază conceptuală, nu tocmai clară și solidă. Categoria „calităților primare“ — număr, mărime extensivă, formă, mișcare — care au permis împreună doar o descriere pur cinematică a fenomenelor naturii, a fost întregită cu noua calitate a inerției, iar ca un nou principiu explicativ a fost adoptată și ideea unor forțe cu acțiune la distanță, concepute numai ca funcții locale. Pe această bază au putut fi elaborate apoi, în secolele XVIII și XIX, teoria potențialului, teoria perturbației ș.a.m.d. (Lagrange, Laplace, Poisson), dar nu numai cele legate de mecanica cerească, ci și teoria forțelor electrice și magnetice (Coulomb, Green, Gauss și alții).

Mai tîrziu s-a adeverit că în electrodinamică este necesară abandonarea forțelor centrale ce depind numai de distanță

---

[13] Într-o scrisoare adresată lui Richard Bentley (L. T. More, *Isaac Newton, A Biography*, New York — London, 1934, p. 379). Aici s-a citat după versiunea germană, E. J. Dijksterhuis, *op. cit.*, p. 595.

În scrisoarea menționată, Newton arată că a întrebuințat noțiunea de *atracție* numai într-un sens metaforic. — *N.R.*

Scanned with OKEN Scanner

și că forța de interacțiune a două particule în mișcare încărcate cu sarcină electrică trebuie concepută ca o funcție care depinde nu numai de distanțe, ci și de vitezele lor (legea lui Weber). Însuși conceptul forței cu acțiune la distanță a continuat să fie menținut. Dar trebuia să fie introdusă, totuși, și ipoteza unei viteze finite de propagare. Pînă la urmă, aceasta a dus în mod necesar la o schimbare fundamentală — reîntoarcerea la o teorie a cîmpului electric, bazată pe ideea acțiunii apropiate (Faraday — Maxwell). Acestea au constituit preludiul unei noi linii de dezvoltare, cu efecte puternice în fizica teoretică și experimentală, în cadrul căreia problema realității a fost readusă în actualitate, dezvoltare care ne duce pînă în pragul fizicii moderne, în sensul actual al termenului.

6

În mod convențional se consideră că data de naștere a fizicii moderne este anul 1900. Atunci a elaborat M. Planck teoria cuantelor, iar puțin mai tîrziu (1905), Einstein a publicat teoria relativității. Se consideră totodată că schimbarea decisivă adusă de aceste teorii se manifestă în special prin apariția unor paradoxuri, precum și prin crearea unei imagini, unei reprezentări noi a realității fizice, care vin în contradicție cu intuiția normală cîștigată spontan în contactul permanent cu lumea care ne înconjură. Sînt binecunoscute în această privință relativitatea simultaneității în teoria restrînsă a relativității (1905) și dualitatea corpuscul-undă în teoria cuantelor (1927). Conștiința naivă vede o contradicție în faptul că două evenimente, depărtate unul de celălalt, sînt simultane, privite dintr-un anumit loc precis, și nu sînt simultane, dacă sînt observate dintr-un alt sistem, aflat în mișcare față de primul. Pare de asemenea o contradicție faptul că o așa-zisă „particulă elementară“ se manifestă o dată ca undă și altă dată ca un corpuscul, în funcție de natura și felul procedeelor pe care le utilizăm pentru observarea și determinarea ei.

Dar această dezvoltare uimitoare a fizicii, care a avut loc în secolul al XX-lea, a fost pregătită cu mult înainte. Am văzut că sistemul simplu al lui Newton, bazat pe ideea forțelor

Scanned with OKEN Scanner

centrale (care sînt funcţii numai locale), a trebuit să fie abandonată în electrodinamică, unde, pînă la urmă, a devenit chiar necesară o reîntoarcere la teoria acţiunilor apropiate. În aparenţă, aceasta a fost o reîntoarcere la concepţia „carteziană" prenewtoniană a secolului al XVII-lea (Huyghens). Dar această aparenţă este înşelătoare. Noua teorie a acţiunii apropiate, care şi-a făcut prima ei apariţie în electrodinamică, nu constituie o reîntoarcere la o veche şi neschimbată imagine, ci reprezintă un eveniment cu totul nou.

J.Cl.Maxwell a întreprins analiza matematică a conceptului de linie de forţă, introdus de Faraday începînd cu anul 1855. În lucrarea sa decisivă[14], publicată în 1862, în care a introdus pentru prima dată conceptul aşa-numitului „curent de deplasare", Maxwell a mai recurs la un model mecanic în vederea obţinerii ecuaţiilor sale, model care a servit pentru reprezentarea intuitivă a tensiunilor unui cîmp electric. Dar acest model nu a avut decît o funcţie euristică şi nu a putut fi recunoscut ca posedînd virtuţi demonstrative. Mai tîrziu el a fost abandonat chiar de către Maxwell (în manualul său cuprinzător, din 1873). S-a întîmplat atunci lucrul următor: Maxwell a ajuns la un sistem de ecuaţii cu o superioară structură simetrică, descriind comportarea cîmpului electromagnetic (aceste proprietăţi de simetrie au ieşit la iveală mai ales după ce ecuaţiile lui Maxwell au fost întregite, în 1890, de către H.Herzt). Acest sistem de ecuaţii, deşi nu a mai fost interpretat în termenii mecanicii[15], şi-a cîştigat o evidenţă specifică prin

---

[14] „Philos. Magazin", (4), 23, 1862, p. 12, ecuaţia nr. 112. Vezi M. v. Laue, *Geschichte der Physik*, Bonn, 1947, pp. 53—54 (trad. în l. română a apărut în Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1965).

[15] Se ştie că din ecuaţiile lui Maxwell rezultă existenţa undelor electrice. Caracterul ondulatoriu al radiaţiei luminoase poate fi explicat şi el pe această cale. Dar caracterul nesatisfăcător al concepţiei mecaniciste s-a demonstrat, de fapt, cu mult înainte. În 1817, în urma unor experienţe cu lumina polarizată, Th. Young a descoperit transversalitatea undelor de lumină, în timp ce la Huyghens mişcarea ondulatorie a luminii mai avea un caracter longitudinal. Transversalitatea mişcării ondulatorii nu a putut fi explicată pe o cale mecanicistă, deoarece mişcări elastice ondulatorii, dotate cu o structură transversală, nu pot apărea în corpurile solide.

Scanned with OKEN Scanner

sine însuși datorită caracterului său închis, am putea spune chiar estetic închegat. Acestea sînt celebrele ecuații despre care Hertz a afirmat că sînt mai inteligente decît oamenii care le-au descoperit.

Marea însemnătate a acestei concepții, care acordă ecuațiilor lui Maxwell evidență în baza structurii lor simetrice, constă în aceea că prin — și o dată cu această mecanică clasică — ea și-a pierdut valabilitatea ca unic fundament pentru construirea fizicii, iar edificiul electrodinamicii a fost ridicat pe aceste ecuații ca pe un fundament firesc. În cadrul noii orientări (care nu poate fi expusă aici cu toate amănuntele ei) a apărut, într-o anume privință, tendința de a deduce mecanica — în teoria restrînsă a relativității — din electrodinamică, în măsura în care viteza luminii (o mărime care nu poate fi determinată decît pe cale electrodinamică) a fost impusă ca limită superioară a vitezei *tuturor* tipurilor de mișcare. Fixarea unei limite superioare pentru viteze a avut consecințe profunde în domeniul dinamicii pure: regula clasică, în aparență absolut evidentă, a adunării și scăderii vitezelor de-a lungul aceleiași direcții și-a pierdut valabilitatea chiar dacă abaterea valorii oferite de noua formulă față de regula clasică nu devine sensibilă decît la viteze apropiate de viteza luminii.

În timp ce în mecanica clasică a lui Galilei — Newton există un principiu relativist, conform căruia transformările față de care legile mecanicii sînt invariante (translațiile uniforme) lasă invariante accelerațiile, dar nu vitezele și ele nu se aplică coordonatei timpului, în teoria restrînsă a relativității apare ca un postulat fundamental invarianța vitezei luminii, deci nu numai accelerația rămîne invariantă. În urma acceptării acestui postulat, formulele specifice de transformare se vor aplica și coordonatei timpului, de unde rezultă, de asemenea, și relativitatea simultaneității raportată la poziția observatorului (fiind vorba de două poziții de observații ce se află în mișcare relativă una în raport cu cealaltă). O altă consecință a aceluiași postulat este și contracția dimensiunilor spațiale în direcția mișcării, precum și dilatarea timpului pentru corpurile ce se deplasează în raport cu observatorul.

Transformările care stau la baza acestei teorii, așanumitele „transformări Lorentz", sînt de o mare simpli-

Scanned with OKEN Scanner

tate matematică și conțin o remarcabilă structură de simetrie: ele reprezintă, în esență, rotații ale sistemului cvadridimensional de coordonate ale „unificării spațiului și timpului“ (Minkowski, 1908). Desigur, coordonata temporală trebuie considerată ca fiind imaginară sau, dacă vrem să rămînem în domeniul variabilelor reale, atunci trebuie introdusă o transformare afină, analogă oarecum cu o rotație, cu deosebirea însă că aici sfera invariantă cu centrul în origine trebuie să fie înlocuită cu un hiperboloid cu două pînze[16]. În această „metrică nedefinită“ sau „geometrie pseudoeuclidiană“ își găsește expresie rolul special pe care îl are coordonata temporală, alături de coordonatele spațiale, acestea nefiind în întregime echivalate, deoarece relației specifice dintre trecut și viitor, în cazul timpului, nu-i corespunde ceva analog în domeniul extensiunilor spațiale.

Trebuie să atragem aici atenția asupra faptului că schema relativistă a raportului dintre spațiu și timp, schemă în care dispare simultaneitatea temporală extinsă asupra întregului spațiu sub forma prezentului general al fenomenelor *(omnipraesentia phaenomenon)*, dispare, fiind înlocuită cu cele două domenii disjuncte al trecutului pasiv și al viitorului activ (în imaginea minkowskiană a lumii, două conuri opuse cu vîrfurile comune în punctul prezentului). O asemenea schemă corespunde mai bine fenomenelor faptice ale vieții concrete decît concepția clasică a spațiului și timpului, dată de mecanica newtoniană. „Trecutul pasiv“ cuprinde toate evenimentele care au un efect asupra mea și despre care eu pot avea, tocmai de aceea, o cunoștință; în schimb, „viitorul activ“ conține toate acele evenimente asupra cărora eu pot avea un efect acum sau mai tîrziu. Primul corespunde unei „lumi a faptelor observabile“, al doilea „unei lumi a efectelor“, în sensul teoriei mediului, elaborată de v. Üxküll. Aceasta, deoarece propagarea unei excitații sau unui

[16] Expresiile introduse aici sînt valabile, desigur, numai în cazul continuului compus dintr-o componentă spațială de două dimensiuni și din coordonata temporală. Dacă vrem să includem și a treia dimensiune spațială în considerațiile noastre, atunci expresiile utilizate trebuie extinse, prin generalizare, asupra unei varietăți de patru dimensiuni.

Scanned with OKEN Scanner

impuls în nervii senzoriali sau motrici se efectuează cu o viteză finită şi nu prea mare. Şi mai elocvent apare această situaţie în cazul unui comandant de oşti din trecutul istoric, cînd transmiterea ştirilor de la şi către „front“ a necesitat un timp mai îndelungat. Ipoteza unui prezent general ar putea fi valabilă, eventual, pentru o viaţă contemplativă, dar în nici un caz pentru una activă.

Concepţia amintită a lui Minkowski, care tinde să înlocuiască spaţiul şi timpul cu o „unificare“ cvadridimensională, duce la o problemă a realităţii de un tip nou. Într-adevăr, se ridică întrebarea: ce constituie, propriu-zis, elementul real în lumea fizică? Însăşi unificarea spaţio-temporală cvadridimensională, sau „proiecţia“ spaţială tridimensională a acesteia, adică secţiunile sale după „aspecte“ spaţio-temporale, dintre care în fiecare moment apare în faţa noastră cîte una, deoarece viaţa noastră se desfăşoară avansînd lent de-a lungul „liniilor noastre de univers“?[17]. Sau, cu alte cuvinte: oare „unificarea“ sau „universul“ minkowskian constituie numai un artificiu matematic, un procedeu elegant pentru a exprima relaţiile noi, create de teoria relativităţii, sau ea ascunde în sine o semnificaţie mai adîncă, poate substanţa invariantă propriu-zisă a evenimentelor? Oare cvadrivectorii şi hexavectorii „universului“ cvadridimensional reprezintă expresiile propriu-zise şi adecvate ale evenimentului fizic? Reprezintă oare aceştia realitatea invariantă propriu-zisă, aşa cum un corp real tridimensional, văzut mereu în perspectivă sub forma unor imagini bidimensionale („umbre“, după o expresie a lui E. Husserl), constituie veritabilul element permanent şi invariabil în această „scurgere a evenimentelor“? Şi, în sfîrşit: această

---

[17] În toate aceste consideraţii nu trebuie pierdut din vedere faptul că fenomenul genuin al „scurgerii timpului“ nu poate fi cuprins în reprezentarea spaţială cvadridimensională a universului minkowskian spaţio-temporal, cu toate că timpul are, în această reprezentare, o poziţie singulară prin aceea că este reprezentat pe o coordonată imaginară. Dar nici o geometrie cvadridimensională, cu o metrică indefinită, nu este în stare să redea fenomenele temporale fundamentale exprimate cu ajutorul termenilor „acum“ şi „acum nu“.

Scanned with OKEN Scanner

nouă fizică, relativistă pledează ea oare pentru o teorie idealistă sau realistă a cunoașterii?

În ceea ce ne privește, noi nu sîntem de părere că teoria restrînsă a relativității ne-ar obliga să aderăm la o concepție gnoseologică determinată. Ea poate fi interpretată atît din punct de vedere idealist (bunăoară, într-un sens neokantian, așa cum a interpretat-o E. Cassirer)[18], cît și dintr-un punct de vedere realist. Se poate afirma tot atît de bine că reprezentările cvadridimensionale, despre care am vorbit, apar abia în cadrul procesului de cunoaștere, care se desfășoară de-a lungul evoluției teoriilor fizice, dar tot atît de bine se poate susține și părerea că aceste obiecte cvadridimensionale au fost dintotdeauna prezente, în mod independent de procesul cunoașterii umane, cu toate că încercarea de a le concepe pe cale intuitivă nu a reușit niciodată. Elementul decisiv și independent de orice concepție „gnoseologică" asemănătoare rămîne în aceste teorii fizice acel aspect matematic care se exprimă prin condiția de invarianță fundamentală pentru o asemenea construcție teoretică, adică structura simetrică cu care sînt dotate formulele matematice asociate. Vechiul principiu al relativității galileene apare în aceste condiții ca un caz limită, un „caz degenerat" (cum spun matematicienii), care apare atunci cînd viteza de propagare a celor mai rapide semnale ia o valoare infinită. Însăși teoria veche poate fi interpretată mai profund abia în lumina noilor realizări teoretice. Chiar și acest fapt, în sine, demonstrează rolul dominant al gîndirii matematice.

În ceea ce privește apoi teoria generală a relativității, problematica extinsă și multilaterală legată de ea nu poate constitui aici obiectul analizei noastre (de exemplu, problema structurii principiale a operației de măsurare sau problema reîntoarcerii aparente la concepția „mișcărilor naturale" — în sensul aristotelic al termenului — a corpurilor cerești și a celor în cădere liberă). Totuși, trebuie să insistăm asupra faptului că elementul matematic este decisiv tocmai în această teorie, în care invarianța legilor

---

[18] Vezi E. Cassirer, *Zur Einsteinschen Relativitätstheorie. Erkenntnistheoretische Betrachtungen*, Berlin, 1921.

Scanned with OKEN Scanner

naturii față de un grup de transformări deosebit de cuprinzător joacă un rol esențial. Acesta rezultă foarte clar din considerațiile făcute de Einstein cu privire la evoluția teoriei sale[19], în expunerea sa autobiografică. Pentru a putea include și fenomenul gravitației în cadrele noi, definite de teoria specială a relativității, Einstein s-a văzut obligat să adopte o teorie bazată pe concepția acțiunii apropiate, să elaboreze deci o teorie a cîmpului gravitațional. Dar dacă o asemenea teorie dorea să cuprindă nu numai cîmpul vid, ci și masele ce se atrag reciproc (care trebuiau să apară ca singularități ale cîmpului), atunci ecuațiile diferențiale ale cîmpului nu mai puteau fi liniare. Încît, pentru a putea scoate pe cele adevărate din multitudinea de necuprins a ecuațiilor diferențiale astfel posibile, a devenit necesară introducerea unui principiu sever de selecție. Acest principiu a fost găsit în condiția de invarianță a fenomenelor față de *toate* transformările continue, un grup de transformări mult mai cuprinzător decît grupul transformărilor Lorentz, care stă la baza teoriei speciale a relativității.

Să mai analizăm aici un aspect specific al teoriei relativității generale, aspect mult discutat și în cercuri mai largi, și anume aplicarea geometriei neeuclidiene (riemanniene) în fizică la descrierea structurii spațiului fizic real. Începînd cu Gauss, Bolyai, Lobacevski și Riemann matematicienii au știut că în gîndire sînt posibile forme spațiale pur matematice, de un aspect variat și multiplu, spațiul euclidian tradițional nefiind decît un caz particular al acestora. Iar B. Riemann a enunțat încă în anul 1854 teza că formula fundamentală a unui continuu spațial cu structură metrică trebuie dedusă din „forțele de coeziune care acționează“ asupra acestui spațiu. Chiar dacă geometria unui spațiu fizic poate fi (după H. Poincaré) aleasă pînă la un anumit grad în mod liber, această alegere va trebui, totuși, să fie dirijată de motive de ordin rațional. Printre acestea joacă un rol esențial punctul de vedere al simplității, precum și respectarea unor relații de simetrie care apar, sau sînt cel puțin presupuse

---

[19] În volumul *Albert Einstein: Philosopher-Scientis*, ed. P. A. Schillpp, New York, 1949, p. 62 și urm.

Scanned with OKEN Scanner

a fi prezente, în evenimentele fizice. Astfel, nu constituie un act arbitrar ci unul rațional faptul ca traiectoria radiației luminoase, la fel ca și cea a mișcării inerțiale să fie concepute ca linii (geodezice) de cea mai scurtă distanță, cu alte cuvinte, ca „traiectoriile cele mai apropiate de linia dreaptă". Aceste considerente l-au condus apoi pe Einstein ca în teoria generală a relativității să interpreteze cîmpul forțelor inerțiale și gravitaționale în funcție de echivalența dintre masa inertă și masa grea, în termenii unui „spațiu metric" care determină geometria spațiului, respectiv ai varietății spațio-temporale cvadridimensionale. De aici rezultă apoi că spațiul este „curb", precum se spune de obicei (utilizînd o expresie analogică, nu cu totul lipsită de pericole, care face aluzie la o suprafață ce se curbează în spațiu).

Dar, dintr-un punct de vedere pur matematic, toate acestea nu prezintă nici un fel de dificultăți, pentru că această expresie, de o rezonanță atît de paradoxală, poate fi interpretată într-o manieră pur simbolică și nimic nu ne împiedică să efectuăm calcule algebrice și analitice în aceste varietăți abstracte, multidimensionale. Concepută însă ca realitate fizică, o asemenea varietate ne obligă, totuși, să abandonăm reprezentările noastre intuitive cu care ne-am obișnuit din timpuri străvechi și care posedă, după toate aparențele, caracterul unor fenomene *a priori* evidente. Desigur, spațiile neeuclidiene pot fi reprezentate pe modele analogice cu un caracter intuitiv, ca, de exemplu, relațiile geometrice de pe o suprafață curbă, cum este suprafața Pămîntului. Toate aceste analogii nu ne pot oferi însă o reprezentare intuitivă a spațiului neeuclidian tridimensional, așa cum globul, bunăoară, reprezintă Pămîntul. Precum a arătat la vremea sa Helmholtz, ar fi posibilă o descriere a acelor evenimente fizice care apar în fenomenele optice ale unui spațiu „curb" (descrierea acestor evenimente, după Helmholtz, seamănă cu „universul" pe care l-am putea vedea oglindindu-se „într-o" sferă de metal cu suprafața poleită); în aceste condiții însă evenimentele vor apărea deformate față de spațiul „normal" și astfel vom fi înclinați, poate, să le interpretăm pe o cale pur fizică și nu pe una geometrică. Pentru

Scanned with OKEN Scanner

că există, într-adevăr, un principiu cu caracter normativ pentru intuiția noastră spațială, oricît de neplăcut ar fi acest fapt fizicienilor și filozofilor de orientare empiristă. Totodată însă, norma euclidiană a intuiției noastre spațiale nu ne obligă, în nici un fel, să considerăm că și spațiul nostru fizic ar fi dotat cu o structură euclidiană. Pentru că spațiul intuiției poate fi conceput ca un spațiu tangent spațiului fizic „curb", punctul de contact fiind congruent cu poziția subiectului observator[20]. În mod analog, omul naiv al trecutului a văzut un plan în suprafața terestră curbă.

Fundamentul și motivul normei euclidiene a spațiului pare să fie următorul: în intuiția concretă a spațiului, noi (observatorul dintotdeauna) stăm în centrul spațiului, iar sistemul natural de coordonate al acestui spațiu intuitiv nu este cunoscutul sistem cartezian cu cele trei axe perpendiculare x, y, z (trei segmente), ci un sistem de coordonate polare. Noi — observatorul — stăm în originea acestui sistem și dispunem de trei coordonate: r, Φ, θ, unde r, este raza vectoare, care reprezintă distanța unui punct față de centru, Φ și θ sînt însă unghiuri directoare raportate la o direcție nulă, convențională. Punctul vizat este văzut de noi sub aceste unghiuri. Aceasta înseamnă că nu mai dispunem de trei coordonate de natură omogenă x, y, z (toate trei fiind aici segmente drepte), ci avem de-a face cu două feluri de coordonate. Mai întîi coordonata r, adică un segment drept, care indică adîncimea spațială a punctului vizat (deci depărtarea la care se află de noi), apoi unghiurile Φ, θ. Din punct de vedere intuitiv aceste două feluri de coordonate pot varia în mod *independent* unul de altul, deoarece ele, privite din punct de vedere fenomenologic, sînt diferite *calitativ* unul de celălalt, la fel ca înălțimea și intensitatea sunetului. Cu aceasta am admis însă, în mod implicit, o „independență a direcției față de poziție" (pentru a utiliza o expre-

---

[20] Spațiul apare, așadar, ca un hiperplan de trei dimensiuni sau, mai precis, „universul" cvadridimensional devine o hipersuprafață, univers pe care îl putem considera, dacă vrem, ca fiind scufundat într-un spațiu euclidian de cinci dimensiuni.

Scanned with OKEN Scanner

sie a lui Riemann), or, această independență este caracteristică tocmai pentru spațiul euclidian[21].

Există însă un argument în favoarea spațiului euclidian — argument orientat într-un sens cu totul diferit și care provine de la F. A. Taurinus (1825)[22]. Trebuie să introducem aici și acest argument, deoarece el are un pronunțat caracter filozofic. Taurinus pleacă de la teza kantiană conform căreia spațiul este o formă *a priori* a intuiției noastre, „o formă pură a senzațiilor exterioare". După aceea, el face observația că din cauza naturii sale apriorice, această formă pură nu poate conține o constantă a cărei valoare să fie determinată pe cale empirică. Dar *numai* spațiul euclidian este unicul (printre formele spațiale care pot veni principial în considerare) care este în întregime liber de o asemenea constantă, a cărei valoare nu poate fi *a priori* fixată pe cale matematică, și tocmai de aceea ea nu poate fi determinată decît pe cale empirică. (Valoarea curburii spațiului euclidian este peste tot egală cu zero.) Tocmai valoarea acestei curburi (respectiv valoarea reciprocă a „razei de curbură a spațiului") rămîne *a priori* nedeterminată chiar și în varietățile spațiale cele mai apropiate de spațiul euclidian. Este vorba de spațiile dotate cu o curbură constantă, a cărei valoare trebuie dedusă din observații făcute în lumea reală sau pe baza unor ipoteze fizice suplimentare. Mulți fizicieni aderă astăzi la existența unei raze de curbură a spațiului egală cu 3 miliarde de ani-lumină[23].

Argumentul lui Taurinus prezintă dificultăți, în formularea dată de el, numai pentru adepții concepției kantiene a spațiului. Dar ea permite o generalizare în următorul sens: dacă spațiul are un comportament cu totul

---

[21] O expunere mai amănunțită a acestui subiect poate fi găsită în O. Becker, *Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendungen*, în „Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung", hrsg. v. E. Husserl, VI, 1923, p. 385 și urm.; vezi în mod special pp. 484, 489 și urm., precum și O. Becker, *Die apriorische Struktur des Anschauungsraumes*, în „Philosophischer Anzeiger", IV, 1930, pp. 129—162.

[22] Vezi GM, p. 183 și urm.

[23] Vezi C. F. von Weizsäcker, *Die Geischichte der Natur*, Göttingen, 1954, p. 130.

Scanned with OKEN Scanner

„neutru“ față de propriul său conținut, deci dacă el nu este decît o simplă formă (indiferent dacă acest fapt este interpretat în sensul idealismului transcendental al lui Kant sau într-altfel), atunci nu poate exista nici o constantă spațială cu caracter empiric. De aici rezultă, din nou, că nici matematica și nici știința exactă a naturii nu ne oferă un criteriu ce ne-ar permite să decidem între idealism și realism.

Ne aflăm acum în fața unei alternative: se poate vorbi sau de un spațiu cosmic cu adevărat neeuclidian, sau de un cîmp universal dotat cu o structură metrică, adică de o realitate fizică propriu-zisă, în care măsurile sînt atît de deformate, liniile de cea mai scurtă distanță (geodezicele) sînt atît de puternic curbate, încît operațiile de măsurare vor da rezultate corespunzătoare geometriei neeuclidiene. Acest cîmp metric poate fi însă conceput ca fiind scufundat într-un spațiu euclidian obișnuit. Pentru a fi mai explicit, să ne gîndim, de exemplu, la cazul în care distanța dintre două locuri A și B, situate într-o regiune muntoasă, este dată nu după linia aeriană, ci în baza timpului necesar pentru a ajunge din A în B, mergînd, desigur, pe suprafața Pămîntului. „Geometria“ ce ar apărea ca un rezultat al unor asemenea „măsurători“ ar fi oricum, numai euclidiană nu. Se va putea spune însă că lucrurile stau astfel nu din vina spațiului, ci a materiei care umple acest spațiu, adică a munților și văilor, a căilor ferate și a drumurilor etc.

Dar, în timp ce în exemplul citat este ușor de făcut o distincție între spațiul vid și conținutul său material, se pare că aceeași distincție este imposibil de efectuat sau este posibilă numai pe o cale arbitrară în cazul principial al spațiului cosmic. Vrem oare să dotăm spațiul cu un caracter absolut și să-l considerăm, totuși, ca o realitate, cum a făcut Newton? Sau vrem să vedem în el doar ordinea evenimentelor simultane[24] și să-l considerăm pur și simplu ca un „*phaenomenon bene fundatum*“, ca Leibniz? Sau să-l privim doar ca forma *a priori* pură a intuiției senzațiilor exterioare, cum a făcut Kant? Sau

[24] Această formulare ar trebui să fie modificată astăzi, din cauza relativității simultaneității.

Scanned with OKEN Scanner

vom fi înclinaţi, poate, să ne întoarcem la concepţia lui Aristotel şi să atribuim spaţiului o „anumită putere“ *(dynamis)*, care provoacă şi determină căderea corpurilor grele?

Nici una din aceste întrebări nu poate fi decisă şi rezolvată în mod univoc de fizica matematică. Teoria generală a relativităţii poate fi interpretată şi înţeleasă din punct de vedere filozofic de pe poziţii complet diferite. Elementul esenţial rămîne şi de astă dată posibilitatea unei precizări matematice şi nimic altceva. În acest sens, se poate afirma că trebuie să lucrăm în mod cert cu o *geometrie* neeuclidiană, dar nu neapărat cu un *spaţiu* neeuclidian.

Cu această ocazie iese mai puternic în evidenţă şi faptul că discontinuitatea decisivă coincide în istoria fizicii (dar nu în aceeaşi măsură şi în istoria astronomiei) cu linia de demarcaţie care desparte epoca ştiinţei naturale de tip antic-medieval, în mod special în varianta sa aristotelică, de ştiinţa matematizată a naturii din secolul al XVII-lea. Nu coincide însă în aceeaşi măsură cu linia de clivaj care desparte fizica nouă, „clasică“ a secolului al XIX-lea, de fizica „modernă“ a secolului al XX-lea, pentru că oricît de mare ar fi deosebirea dintre fizica clasică şi cea modernă, ambele îşi concentrează eforturile spre a pătrunde în secretele naturii cu ajutorul unor mijloace *matematice* şi ambele sînt caracterizate printr-o renunţare conştientă la cunoaşterea de factură calitativ-metafizică a „esenţei“ naturii.

Trăsăturile esenţiale ale imaginii conturate mai sus nu se schimbă dacă, în încheiere, mai aruncăm o privire asupra mecanicii cuantice şi asupra problemelor sale specifice cu implicaţii filozofice. În această analiză însă vom avea posibilitatea să insistăm asupra detaliilor într-o măsură şi mai mică decît în cazul teoriei generale a relativităţii.

Punctul nevralgic al fizicii cuantice îl constituie dualitatea undă-corpuscul şi, împreună cu aceasta, problema influenţei exercitate de „observator“ asupra evenimentelor fizice „reale“, „obiective“. Precum se ştie, determinarea exactă a poziţiei spaţiale şi a impulsului unei particule nu este posibilă în mod simultan, adică prin

Scanned with OKEN Scanner

intermediul unui singur experiment. Dacă determinarea uneia din cele două mărimi „complementare“ (poziție și impuls, timp și energie) reușește, atunci cealaltă devine neprecisă. În cazul extrem, cînd una din cele două mărimi este stabilită cu exactitate, a doua nu mai poate fi de loc determinată. Aceasta constituie conținutul esențial al „relațiilor de incertitudine“ ale lui Heisenberg.

În urma unor discuții multiple, Niels Bohr a introdus în 1927 conceptul fundamental de *complementaritate*, de care am făcut uz în cele precedente. El a introdus două imagini intuitive, complet diferite, pentru interpretarea evenimentelor cuantice. Acestea sînt complementare în sensul și în măsura în care ele pot sta alături, fără să genereze o contradicție, adică atunci și numai atunci cînd domeniul lor de aplicare este în așa fel delimitat, încît ele nu sînt niciodată simultan aplicate. După felul specific al experimentului, „particula elementară“ se va manifesta ca undă sau corpuscul.

W. Heisenberg[25] privește întreaga problematică dintr-un alt unghi și anume dintr-un punct de vedere deosebit de important pentru problema fundamentală a rolului jucat de elementul matematic în fizică. Heisenberg pornește de la ipoteza că în natură pot fi întîlnite sau pot fi produse pe cale experimentală numai stări care admit o reprezentare ca vectori ai unui spațiu Hilbert, cu un număr infinit numărabil de dimensiuni. În această privință modelul lui Heisenberg a fost teoria restrînsă a relativității, care și ea da o reprezentare a lumii fizice prin intermediul „universului“ cvadridimensional. Un vector al spațiului Hilbert, cu un număr infinit de dimensiuni (sau matricea hermitiană asociată), nu admite nici o interpretare intuitivă. Tot atît de imposibilă este și o interpretare intuitivă prin reprezentarea echivalentă a lui Schrödinger efectuată prin intermediul unei unde a spațiului figurativ, pentru că spațiul figurativ posedă un număr de $3n$ dimensiuni, pentru n particule. Este vorba, așadar, de o pură expresie analogică cu o undă intuitivă a spațiului de 3 dimensiuni. Încercarea de a

[25] Vezi W. Heisenberg, *Die Entwicklung der Deutung der Quantenmechanik*, în „Physikal. Blätter“, 12, nr. 7, 1956, p. 292.

Scanned with OKEN Scanner

da o interpretare intuitivă duce din nou la cele două imagini complementare (corpuscul și undă) ale lui Bohr.

În această ordine de idei se pune întrebarea cum stăm cu realitatea fizică (sau ar fi mai corect să spunem: „fizicală"?) a evenimentelor de natură cuantică. N. Bohr vorbește de „imposibilitatea de a stabili o distincție riguroasă între comportamentul obiectelor atomice și interacțiunea acestora cu instrumentele de măsură, care servesc la stabilirea condițiilor de apariție a fenomenelor"[26].

Iată o formulare dată de C. F. von Weizsäcker: „Despărțirea în subiect observator și obiect observat nu mai poate fi efectuată nici măcar în gînd"[27]. El interpretează în continuare această teză astfel, încît atît actul fizic al interacțiunii cu aparatul care servește pentru observarea fenomenului (din cauza naturii cuantice a energiei, aparatul nu poate deveni niciodată, nici măcar „în principiu", arbitrar de mic), cît și actul conștient al citirii rezultatului pe aparatul de măsură să fie echivalente cu „observația" în sensul mecanicii cuantice. Esențială aici este „unitatea faptică" a ambelor. El adaugă chiar că: „... actul observației este identic cu acea interacțiune fizică care *este* în același timp un act de conștiință. Acest fapt va putea fi conceput fără o contradicție internă numai după ce vom fi renunțat în mod conștient la disocierea universului în *res extensa* și *res cogitans* introdusă de Descartes".

Aceste observații ale lui v. Weizsäcker sînt pătrunse de spiritul unei gnoseologii într-o oarecare măsură idealistă. Într-adevăr, ele dau cel puțin impresia că „unitatea faptică" a interacțiunii fizice (deci transferul de energie ce are loc în timpul observației din aparat către obiect, de exemplu prin intermediul unei raze care luminează obiectul) cu actul conștient al citirii rezultatului pe un instrument, adică apercepția pur spirituală care vehiculează însăși cunoașterea rezultatului măsurării ar exer-

---

[26] Vezi N. Bohr, *Discussion with Einstein on Epistemological Problems in Atomic Physics*, în *A. Einstein: Philosopher-Scientist*, p. 240.

[27] Vezi C. F. von Weizsäcker, *Physik der Gegenwart*, ed. 2-a, Göttingen, 1958, p. 84 și urm.

Scanned with OKEN Scanner

cita vreo influenţă asupra stării însăşi a obiectului. Dar o asemenea interpretare va suscita, cu siguranţă, îndoieli. Pentru că trebuie să luăm în considerare, de exemplu, următoarele: actul de observaţie a obiectului cu instrumentele actuale de măsură, de pildă cu un contor de particule Geiger sau cu ajutorul unei pelicule fotografice, are loc adesea în aşa fel încît apariţia unui microobiect, bunăoară a unui electron, este înregistrată fără ca un observator iniţiat să fie măcar prezent. Abia mai tîrziu şi chiar după săptămîni sau luni de zile, vor trebui să fie descifrate de către un observator iniţiat însemnările înregistrate pe cale automată de aparat (pe o peliculă fotografică sau pe o bandă magnetică). Abia în acest moment va putea începe actul spiritual propriu-zis al cunoaşterii, despărţit în timp de un interval arbitrar de mare de evenimentul interacţiunii fizice care a avut loc între obiect şi aparat — aparat care, atîta timp cît funcţionează automat, este şi el un simplu obiect şi în nici un caz un „subiect“ oarecare. Cum mai este posibil, în aceste condiţii, să se vorbească de o „unitate faptică“ dintre partea fizică a procesului de măsurare şi efectuarea actului de cunoaştere? Desigur, nu poate fi negată existenţa unei unităţi rezonabile între cele două evenimente depărtate în timp: interacţiunea fizică pe de o parte, actul aperceptiv pe de alta. Este posibil ca sub expresia „unitate faptică“ v. Weizsäcker să fi avut în vedere tocmai o asemenea unitate. Modul său de exprimare însă nu poate înlătura anumite dubii.

În combaterea unor observaţii făcute de savantul sovietic A. Aleksandrov[28], W. Heisenberg se exprimă într-un mod oarecum diferit. Aleksandrov a susţinut că expresia „rezultat al măsurării“ trebuie interpretată în teoria cuantelor numai în sensul efectului obiectiv al unei interacţiuni ce are loc între un electron şi un obiect corespunzător (evident, instrumentul de măsură).

---

[28] Vezi A. Aleksandrov, „Dokl. Akad. Nauk“, 84, nr. 2, 1952. În concordanţă cu învăţătura materialist-dialectică, omul de ştiinţă sovietic refuză orice variantă „idealistă“ în interpretarea teoriei cuantelor, în timp ce recunoaşte valabilitatea „interpretării «fizicale» a şcolii de la Copenhaga“.

Scanned with OKEN Scanner

Pomenirea observatorului trebuie să fie exclusă. O mărime fizică constituie o caracteristică obiectivă a fenomenului și nu rezultatul unei observații subiective. Răspunzînd la acestea[29], Heisenberg a observat că dacă aparatul de măsură și întregul sistem de observație, legat de el, ar putea fi privite în mod izolat de tot restul universului, atunci nu s-ar putea ajunge de cele mai multe ori la un rezultat de măsură determinat, cum ar fi, bunăoară, înnegrirea unei plăci fotografice într-un punct determinat. În momentul în care se afirmă că „în realitate" placa fotografică a fost totuși înnegrită, în acest moment a și fost abandonată mecanica cuantică în interpretarea sistemului închis: „electron + placă fotografică". Caracterul „faptic" al unui eveniment în viața faptică nu este, în mod implicit, inclus în formalismul matematic al mecanicii cuantice. Acest caracter va apărea abia după introducerea unui observator.

Dar, prin introducerea observatorului, Heisenberg nu introduce — și din punct de vedere „filozofic" acesta are o deosebită importanță — nici un element subiectivist în descrierea fenomenelor naturii. Funcția „observatorului" constă, în mod exclusiv, în aceea de a înregistra decizii — fapte împlinite — în spațiu și timp. În aceste condiții este cu totul indiferent dacă „observatorul" este un aparat automat sau o ființă vie (sau, în mod special, un cunoscător al fenomenului). Deasupra tuturor, mai importantă este însăși trecerea de la simpla posibilitate la fapt în cadrul fenomenului *actual* al înregistrării. Această ultimă observație a lui Heisenberg — precum o indică el însuși — este într-o legătură strînsă cu următoarele considerații ale lui v. Weizsäcker: numai evenimentele viitoare sînt încă posibile, evenimentele trecute constituie, în schimb, fapte împlinite. Este complet lipsită de sens orice întrebare ulterioară cu privire la probabilitatea (posibilitatea cantitativ determinată) realizării unui eveniment; ea a devenit doar, între timp, o realitate. În concordanță cu sensul său propriu, faptul împlinit interzice orice întrebare cu privire la posibilitatea, res-

[29] „Physikal. Blätter", 12, nr. 7, 1956, p. 298 și urm.

Scanned with OKEN Scanner

pectiv probabilitatea realizării sale[30]. Cu aceasta dispare însă un fapt istoric (cum ar fi, bunăoară, înregistrarea unui eveniment de un contor) dintr-o teorie care, ca și mecanica cuantică, operează numai cu posibilități (cu unde de probabilitate).

Punctul de vedere schițat prezintă importanță nu numai pentru mecanica cuantică (unde își găsește o aplicație în așa-numita operație de „reducție a pachetului de unde"), ci și în termodinamica statistică clasică, atunci cînd încercăm să interpretăm, de exemplu, evenimentele macroscopice ce au loc într-o masă de gaz ca o trecere necontenită de la o macrostare mai puțin probabilă, la una mai probabilă. Pentru că dacă avem, bunăoară, de-a face cu o stare foarte puțin probabilă, atunci, în virtutea regulilor calculului probabilității, nu numai stadiul imediat următor, dar și cel imediat precedent va poseda o probabilitate mai mare. Dar o asemenea concluzie vine în contradicție cu faptele, pentru că, în realitate, probabilitatea macrostărilor efectiv realizate este în permanentă creștere, în virtutea celui de-al doilea principiu al termodinamicii (apropierea asimptotică de „moartea termică"). Raționamentele probabilistice cu privire la trecut nu concordă, așadar, cu realitatea. După C. F. von Weizsäcker, semnificația acestei discordanțe constă în indicarea lipsei totale de sens pe care ar avea-o întrebările puse cu privire la posibilitatea sau probabilitatea unor stări sau evenimente trecute, a unor fapte devenite de acum istorice.

Un sistem cuantic complet izolat de lumea exterioară are caracterultdoar al unei simple potențialități, și nu ca ceva cu carac er efectiv, faptic. Tocmai de aceea este im-

---

30 *Physik der Gegenwart*, p. 41. Vezi *Geschichte der Natur*, p. 143. Trebuie să atragem aici atenția asupra remarcabilelor considerații făcuta de Charles Sanders Peirce, prezentate de A. N. Prior în cîetea sa *Time and Modality*, Oxford, 1957, pp. 112—116. Cea mai rnsemnată idee a lui Peirce este aceea că în opoziție față de evenimentele prezente și trecute, realitatea evenimentelor viitoare are, într-un anumit sens, un caracter neindividualizat. O totalitate de elemente posibile sau viitoare este lipsită de aspectul identității individuale a elementelor sale singulare. În mod analog se comportă, cum se știe, particulele elementare în statistica Bose-Einstein, în opoziție cu statistica clasică a lui Boltzmann.

Scanned with OKEN Scanner

posibilă descrierea acestora (după cum observă N. Bohr) cu aparatul conceptual al fizicii clasice. Starea sistemului închis și izolat, reprezentat prin intermediul *unui* vector al spațiului Hilbert (și nu printr-un amestec statistic al unei mulțimi de vectori), constituie — în formularea lui Heisenberg — ceva în sine „obiectiv", dar nu „real", pentru că în acest sistem nu poate avea loc nici un fapt istoric constatabil al universului macroscopic ce ne înconjură (asemenea fapte macroscopice ar fi, bunăoară, înnegrirea unei plăci fotografice, semnalul unui contor ș.a.m.d., fenomene ce au loc în aparatele care sînt vizibile și stau la dispoziția noastră în laboratoare pentru a fi mînuite în diverse scopuri). În această măsură concepția clasică a lucrurilor „obiectiv-reale" trebuie să fie abandonată.

Caracterizarea sistemului cu caracter atomic prin intermediul *unui* vector al spațiului Hilbert este complementară descrierii aceluiași sistem în limbajul conceptual al fizicii clasice, la fel precum în termodinamica statistică determinarea stării macroscopice a unei mase de gaz este complementară determinării temperaturii.

Temperatura constituie aici, desigur, conceptul clasic. Ea poate fi citită nemijlocit de un „observator", pe un termometru — un instrument accesibil vizibilității și manipulațiilor macroscopice. Desigur, temperatura poate fi înregistrată și pe cale automată, fără ca un observator uman să fie măcar prezent. Temperatura este, așadar, „reală". Dar ea nu este, totuși, „obiectivă". Aceasta, deoarece numai starea microscopică a gazului, inaccesibilă observației directe, este aceea care poate fi considerată ca avînd o „prezență obiectivă".

Cunoașterea evenimentelor faptice (adică a celor macroscopice) constituie, în esență, o cunoaștere mereu incompletă atît în mecanica cuantică, cît și în termodinamică.

Vedem, așadar, că în lumina „interpretării școlii de la Copenhaga", rigida opoziție tradițională „realism-idealism" nu mai este aplicabilă, iar teoria cunoașterii, moștenită din trecut, încetează să mai fie valabilă în legătură cu aceste probleme.

Nu avem posibilitatea să analizăm aici obiecțiile care au fost aduse adesea împotriva interpretării teoriei cuan-

Scanned with OKEN Scanner

telor, descrisă mai sus. Totuşi, trebuie să observăm în legătură cu acestea următoarele [31]: propunerile opuse „interpretărilor date de şcoala de la Copenhaga“ se rezumă, pînă la urmă, toate la următoarele: întîi, că numai una din cele două laturi ale dualităţii „undă-corpuscul“ trebuie acceptată ca fiind reală; în general, corpusculele sînt acelea care sînt dotate cu realitate. În al doilea rînd, sînt mereu introduşi „parametri ascunşi“, necunoscuţi nouă, şi care ar determina, totuşi, traiectoria particulei individuale, acţionînd într-o „realitate transcendentă“ (depăşind limitele unui enunţ cu caracter statistic). Obiecţia lui Heisenberg — de o remarcabilă importanţă pentru noi — împotriva tuturor acestor interpretări care concurează cu punctul de vedere al şcolii de la Copenhaga constă în aceea că ele toate distrug simetria dintre coordonata de poziţie q şi coordonata de impuls p, ca şi simetria ce-şi găseşte expresie în limbajul specific al teoriei cuantelor. În timp ce formula $|\Psi(q)|^2$ exprimă repartizarea probabilistică în spaţiul poziţiilor, formula $|\Psi(p)|^2$ nu mai reprezintă o asemenea repartizare în spaţiul de impuls. În această combatere, rolul principal îl joacă din nou un raţionament cu caracter „pitagoreic“.

Cei ce sînt de părere opusă se tem, desigur, că prin interpretările descrise de noi, fizica va pierde conceptul fundamental de „realitate obiectivă“. O asemenea teamă este însă nejustificată. Pentru că, pînă la urmă, totuşi, acele evenimente reprezintă realitatea propriu-zisă, care are loc în spaţiul şi timpul universului nostru cotidian, iar totalitatea lor alcătuieşte realitatea vieţii noastre faptice. „Dacă încercăm să pătrundem în spatele acestei realităţi — scrie Heisenberg[32] — şi vrem să ne scufundăm pînă la nivelul evenimentelor atomice, atunci contururile acestui univers obiectiv-real se dizolvă, dar nu în ceaţa unei reprezentări probabiliste noi şi încă neclare, ci în claritatea translucidă a unei *matematici*, care fixează în forma unei legi posibilul, şi nu efectivul faptic“.

Această idee se leagă de observaţia făcută de Heisenberg cu privire la teoria pitagoreizantă a lui Platon cu

---

[31] Vezi W. Heisenberg, *op. cit.*, în *loc. cit.*, p. 294 şi urm.
[32] *Op. cit.*, în *loc. cit.*, p. 304.

Scanned with OKEN Scanner

privire la cele patru elemente, prezentată în *Timaios*, teorie care a făcut obiectul analizei noastre în primul capitol al lucrării prezente. Văzut dintr-un punct de vedere pur principial, trebuie să constatăm că încă la Platon apare dizolvarea materiei în forme matematice (chiar dacă la el conceptul de probabilitate nu joacă încă nici un rol). Elementele platonice sînt (în sensul terminologiei utilizate de noi aici), desigur, „obiective", dar nu „reale", adică ele nu sînt accesibile organelor noastre de simț. Spre deosebire de identificarea „existențială" a „realității" cu domeniul faptic concret al vieții — pe care-l disprețuiește — Platon atribuie, desigur, realitate numai matematicii invizibile a particulelor sale elementare. Elementul comun al școlii de la Copenhaga cu concepția lui Platon constă însă în aceea că în ambele cazuri se refuză să se transfere proprietățile („primare") esențiale ale corpurilor macroscopice „concrete", particulelor elementare, așa cum au făcut Anaxagora și Democrit, și așa cum procedează materialiștii din toate timpurile și pînă în zilele noastre[33].

7

A sosit timpul să recapitulăm, pe scurt, și să întregim într-o oarecare măsură rezultatele considerațiilor precedente. Am pornit de la teza, astăzi foarte răspîndită, conform căreia tehnica ar fi scopul propriu-zis și totodată mobilul secret al dezvoltării științelor exacte. Am arătat apoi, pe exemplul celei mai vechi științe exacte, *astronomia*, că această teză nu poate fi menținută sau, cel puțin, trebuie îngrădită, pentru că prin simpla ei prezență milenară, astronomia anihilează teza cu privire la primatul tehnicii. Am arătat apoi că abia secolul al XVII-lea a ajuns la punctul de cotitură, inaugurînd noua orientare

[33] În acest sens, obiecțiile aduse de Aristotel triunghiurilor elementare ale lui Platon (vezi *De coelo*, III, 1) au de asemenea un caracter „materialist". „Realismul critic" al zilelor noastre se străduiește să fie mai puțin primitiv; totuși, nu poate scăpa nici el necesității de a introduce reprezentări noi și puțin clare ale conceptului de lume reală. Vezi W. B ü c h e l, *Quantenphysik und kritischer Realismus*, în „Philosophia naturalis" V. nr. 1, 1958, pp. 3—54.

Scanned with OKEN Scanner

către tehnică prin aceea că a început să aplice procedeele gîndirii matematice exacte asupra cercetării „lumii sublunare". Această nouă orientare este caracterizată printr-o serie de invenții deschizătoare de drumuri: luneta și microscopul, orologiul cu pendul și pompa pneumatică; acestei serii îi aparține și mașina cu aburi, prima sursă mai puternică de energie tehnică (depășind tradiționalele mori de apă și de vînt), chiar dacă ea a fost inventată abia pe la sfîrșitul secolului al XVIII-lea.

În toată această evoluție *experimentul analitic* s-a dovedit a fi elementul decisiv, un nou tip al metodei experimentale, pe care nici antichitatea și nici evul mediu nu l-au cunoscut. Abia această metodă a îngăduit introducerea unei disocieri în împletitura deasă a cauzelor naturale, o asemenea distincție fiind condiția necesară pentru ca să se formuleze legi naturale exacte și, prin aceasta, să se ajungă la stăpînirea forțelor naturii.

Cauza pentru care astronomia, în dezvoltarea ei istorică, a depășit atît de mult toate celelalte științe exacte este aceea că în cazul mișcărilor corpurilor cerești avînd mase incomparabil mai mari decît cele pămîntești, omul a dispus de „cazuri pure" în natura neatinsă, pentru că mișcările acestor corpuri au loc în spațiul cosmic practic vid și ele pot fi urmărite în mod regulat cu ochiul liber, nefiind nevoie să fie produse pe o cale experimentală. În cazul mișcărilor planetare, la toate acestea se mai adaugă și împrejurarea fericită că sistemul nostru solar nu are decît *un singur* corp central. Dacă Soarele ar fi fost o stea dublă, atunci situația ar fi fost mult mai complicată și mult mai greu de cuprins. În realitate însă, traiectoriile planetelor și ale sateliților lor (la fel și traiectoria Lunii, satelitul Pămîntului) au forma aproape circulară și sînt, prin aceasta, fenomene ușor de redat prin intermediul calculului. Cu toate acestea, ele prezintă o serie de probleme nebanale[34], din cauza deformărilor ce se datorează perspectivei pămînteşti și a unor slabe anomalii care provin din caracterul ușor eliptic și excentric al traiectoriilor. Aceste anomalii au atras aten-

[34] Vezi O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, p. 152.

Scanned with OKEN Scanner

ția și au provocat din timpuri imemorabile uimirea tuturor oamenilor care au urmărit prin observații fenomenele cerești.

Toate acestea au favorizat apariția timpurie a științei fenomenelor cerești și au dus la convingerea că numai fenomenele cerești — dar nu și cele pămîntești — se supun unor legi naturale exacte. Această convingere nu a fost niciodată contestată în mod serios, nici în antichitate și nici în decursul evului mediu. De aici decurge în mod firesc o oarecare repulsie față de descrierea cantitativă a fenomenelor naturale pămîntești, o atitudine caracteristică pentru concepția naturalistă aristotelică-scolastică, chiar și atunci și acolo unde știința se pronunță pentru metode empirice (așa cum face, de exemplu, Albertus Magnus). Ruptura a apărut (cu toate că anumite anticipații șovăitoare au existat deja la terminiștii de la Paris, în secolul al XIV-lea) abia în epoca timpurie a barocului, o dată cu Galilei, Kepler, Descartes, Pascal, Huyghens, Newton, pentru a nu pomeni decît cele mai importante nume. Teza decisivă a fost exprimată de Galilei: „Cartea lumii este scrisă în limba matematică“[35]. Îndrăznețele cuvinte rostite ulterior de Galilei exprimă poate cu și mai multă claritate ideea că deși din punct de vedere *extensiv*, adică din punctul de vedere al ariei sale, cunoașterea matematică diferă, probabil, de cunoașterea divină, din punct de vedere *intensiv*, adică din punctul de vedere al calității, ea este totuși echivalentă cu această cunoaștere[36]. În fond, nici Newton și nici Leibniz nu stau prea departe de această concepție; în mod special, conceptul deosebit de cuprinzător al „monadei“ leibniziene se extinde asupra lui Dumnezeu, asupra omului și asupra tuturor creaturilor și toate aceste monade diferă între ele numai în privința gradului de claritate cu care își „reprezintă“ universul. Abia spiritul profund al lui Kant va vedea din nou limitele imposibil de depășit ale omului în caracterul său finit.

În dezvoltarea ulterioară a științelor exacte, în secolul al XIX-lea, această atitudine tipică secolelor XVII

---

[35] Galilei, *Il Saggiatore*, Ediz. Nat. VI p. 232.
[36] *Dialogo I*, Ediz. Nat. VII, p. 128 și urm.

Scanned with OKEN Scanner

și XVIII va fi supusă unor obiecții ironizante și i se va reproșa, de exemplu, că-l transformă pe Dumnezeu într-un „inginer la pensie", care a creat lumea odată, în străvechiul trecut îndepărtat, dar, pe urmă, a lăsat-o în voia ei. Iar celebrul astronom și matematician Laplace — conform unei anecdote cunoscute — i-a replicat lui Napoleon, atunci cînd acesta s-a interesat de locul pe care Dumnezeu ar trebui să-l ocupe în sistemul lumii elaborat de el: „*Sire, je n'avais pas besoin de cette hypothèse-là*" (Maiestate, nu am avut nevoie de această ipoteză. — *N. T.*).

În toate aceste oscilări ale concepțiilor filozofice privind natura și cunoașterea ei, rolul dominant al matematicii rămîne inebranlabil. Niciodată nu apare nici măcar urma unei tendințe de reîntoarcere la concepțiile pregalileene calitative — metafizice ale scolasticii. Desigur, romantismul german — iar din punct de vedere filozofic, idealismul german — este în mod pronunțat orientat într-un sens străin matematicii. Este, într-adevăr, surprinzător cît de puțin a înțeles din matematică un spirit de o cultură atît de cuprinzătoare cum a fost, bunăoară, Hegel, care a demonstrat forța gigantică a speculației sale în atîtea domenii științifice ale dezvoltării spirituale. Cît de lamentabil sună observațiile matematice pe care le-a introdus în *Știința logicii*![37] Și nici la Schelling nu stau lucrurile altfel[38]. Această incapacitate a romanticilor — poate cu unica excepție a lui Novalis — de a înțelege matematica a dus în Germania la o totală despărțire, și cu consecințe funeste, a științelor exacte și „spirituale", în așa fel încît științele exacte s-au dezvoltat în mod independent, deși aproape că nu au suferit nici o influență din partea filozofiei germane[39]. Aici trebuie căutată una din cele mai importante cauze ale orientă-

[37] Hegel lăsa impresia că și-ar fi dobîndit înțelepciunea sa matematică din mica scriere polemică a lui Berkeley, *The Analyst*, pe care autorul ei a destinat-o combaterii calculului fluxional al lui Newton.

[38] Trebuie să amintim aici și felul cu totul greșit în care a interpretat Goethe teoria newtoniană a culorii, o interpretare care era, în esență, bazată pe refuzul radical al experimentului analitic în cercetarea fenomenelor naturii.

[39] B. Riemann a fost într-o oarecare măsură influențat de „realistul" Herbart, dar această influență nu a fost prea adîncă.

Scanned with OKEN Scanner

rii empiriste pe care a luat-o la sfîrșitul secolului al XIX-lea gnoseologia științelor naturii (Mach) și cu care stă în strînsă legătură, bunăoară, și interpretarea „fiziologistă" dată lui Kant de către Helmholtz. Dar matematica a rămas aproape neatinsă și de această orientare.

Lucrurile au rămas în această stare — precum am arătat pe larg — și în decursul secolului al XX-lea. Considerațiile noastre critice privind conceptul de realitate în științele exacte ale naturii au arătat tot atît de clar situația existentă în acest domeniu, ca și dependența rațională dintre experimentul analitic și „analiza" matematică. Teoriile noi ale fizicii „moderne" din secolul al XX-lea, teoria relativității și teoria cuantelor nu au reușit să aducă o decizie în vechea dispută dintre idealismul critic și realismul critic, dispută care s-a reaprins în cursul secolului al XIX-lea. Modul de construcție a modelelor pentru reprezentarea naturii, de care se servea fizica clasică (și aici nu ne gîndim numai la concepția „mecanicistă" a fenomenelor naturii, în sensul lui Huyghens și Descartes, devenită de mult desuetă), s-a dovedit a fi cu totul naiv. Iar în ceea ce privește „esența" naturii, despre ea nu s-a putut stabili nimic în termeni pozitivi; s-a putut însă afirma cel puțin atîta, într-un sens negativ, că fenomenele naturii nu pot fi reprezentate adecvat prin intermediul unor modele mecanice asamblate la nimereală. Conceptul de model a cîștigat prin aceasta un caracter „relativ". Fizica teoretică de azi construiește *(in abstracto)* tot felul de modele, despre care însă știe precis că ele nu pot reda decît anumite trăsături ale fenomenelor supuse observației, că ele reprezintă doar aproximații mai mult sau mai puțin fine ale obiectul și din această cauză au doar o valabilitate limitată. Cu această ocazie s-a adeverit că efectuarea unor modele intuitive este adesea cu desăvîrșire imposibilă. Astfel, nici structura neeuclidiană cu care teoria generală a relativității a dotat continuul spațio-temporal și nici spațiul Hilbert al teoriei cuantelor nu pot fi interpretate în termeni intuitivi prin intermediul unui model, iar teoria cuantelor permite, în general, o interpretare numai pe două modele ce se exclud reciproc: undă și corpuscul.

Scanned with OKEN Scanner

Neatins rămîne din nou elementul matematic cu structurile sale, desigur abstracte, dar întotdeauna „simetrice"; esența proprie a cosmosului pare să fie încorporată tocmai de aceste structuri. Lumea concepută ca un cristal; aceasta pare a fi ultima viziune a universului pe care o zărim închegîndu-se în orientarea actuală a științei.

În sfîrșit, trebuie să punem întrebarea dacă în legătură cu această concepție „pitagoreică" a universului se mai poate vorbi de o „sfidare a naturii" de către știința modernă, cel puțin în măsura în care este vorba de știința teoretică, de o abordare meditativă a fenomenelor naturii. Am arătat că dezvoltarea științelor matematizate ale naturii a devenit posibilă numai în urma unui act de renunțare: *naturam renuntiando vincimus* sau, mai bine zis, *cognoscimus*. Un asemenea gest de renunțare este greu compatibil cu o atitudine de sfidare. În fond, renunțarea este echivalentă cu o retragere. Dar retragere — unde? În universul matematicii, care — și aceasta ține de esența ei — aparține domeniului posibilității. Pentru că, așa cum l-a văzut deja Leibniz, imperiul matematicii este populat de „lumile posibile". Astăzi este de-a dreptul de neconceput o reîntoarcere la o interpretare cvasiantropomorfă a naturii, în sensul unui romantism nou (anumite încercări par să fi fost totuși făcute în această direcție). Aceasta ar fi însă poezie și nu știință.

Cu toate acestea, aplicarea matematicii în domeniul științelor naturii își are limitele sale, dar aceasta provine din mărginirea însăși a matematicii. Un capitol ulterior al lucrării de față va fi consacrat aspectelor pe care le îmbracă această mărginire în matematica pură. În privința aplicațiilor matematicii asupra fizicii și astronomiei, s-a dovedit încă în timpul lui Newton că capacitatea ei de a rezolva problemele care-i revin prin obiectul lor cunoaște anumite limite. Astfel, de exemplu, „problema celor două corpuri", adică problema pusă de Kepler — a determinării traiectoriei *unei* planete în jurul Soarelui — a putut fi rezolvată exact în cadrul teoriei newtoniene a gravitației, cu ajutorul mijloacelor matematice ale timpului. Nu la fel stau lucrurile însă cu „problema celor trei corpuri", adică determinarea simultană a mișcării Soarelui, a planetei Jupiter și a Pămîntului

Scanned with OKEN Scanner

sub influența gravitației: exceptînd anumite cazuri speciale, această problemă nu a putut fi rezolvată în epoca lui Newton. Puțin înaintea anului 1900, H. Poincaré a demonstrat că problema celor trei corpuri, în forma ei generală, nici nu poate primi o soluție într-o formă finită, ci numai una aproximativă, prin intermediul unei dezvoltări într-o serie infinită, soluție ce a fost dată încă cu mult timp înainte. În această problemă matematică și-a demonstrat pentru prima dată incapacitatea ei matematica nouă a secolului al XVII-lea, iar de atunci și-a mai demonstrat frecvent incapacitatea atît matematica clasică, cît și cea modernă în fața unor probleme pe care i le-a pus fizica teoretică. Se poate spune că o problemă fizică dificilă își găsește numai în mod excepțional o soluție viguroasă și exactă pe cale matematică. În general însă, fizicianul trebuie să lucreze cu aproximații și să facă mereu abstracție de anumiți factori, căutînd astfel să evite și să ocolească în mod artificial greutățile.

În timp ce considerațiile precedente țin de anumite limite ce se află în interiorul matematicii, în domeniul științelor naturii există și limite pur exterioare care se opun aplicării metodelor matematice. Această mărginire își are rădăcinile nu în structura matematicii, ci în obiectul căruia ar trebui să i se aplice. Într-adevăr, pînă acum a fost vorba mereu doar de natura lipsită de viață și niciodată de ființele vii. Desigur, viață există doar într-un domeniu redus, infim față de ansamblul universului: zona ei se află situată între ordinele de mărime de la a miloana parte dintr-un centimetru pînă la 100 m. Trebuie să lăsăm însă fără răspuns întrebarea cu privire la posibilitatea de a aplica matematica la domeniul specific de fenomene ce poartă denumirea de „viață"; nu știm în ce măsură este potrivită ea să rezolve secretele acestor fenomene situate în acel interval singular de dimensiuni și în condiții fizice foarte precis delimitate. Și nu avem îndrăzneala să dăm un răspuns decisiv la întrebarea dacă teza platonicienilor pitagorizanți din secolul al IV-lea î.e.n.: „*Psyche* (sufletul, în sensul unui principiu vital general) este un număr ce se mișcă de la sine" — este adevărată sau nu.

Scanned with OKEN Scanner

III

Matematica pură, ca știință liberă

1

S-ar putea ca informația transmisă de tradiție, în virtutea căreia Pitagora a transformat matematica într-o „învățătură liberă" *(paideia)*, să nu corespundă textual realităților istorice; în conținutul său esențial ea este, totuși, adevărată. Pentru că grecii vechi au fost aceia care au creat matematica ca o știință, în sensul propriu al cuvîntului, deci ca o disciplină independentă, suficientă ei însăși. Chiar dacă cercetarea modernă a fundamentelor matematicii — așa cum este cultivată ea în țările anglo-saxone — se îndreaptă încă atît de des (fiind în această privință dependentă de tradițiile empiriste ale filozofiei engleze și, în special, de influența lui David Hume) împotriva a tot ce are un caracter aprioristic, și supunînd-se deci unor convingeri „nominaliste", ea nu poate să nu fie, totuși, de acord cu oponenții săi platonizanți în privința independenței matematicii de experiența empirică. Argumentul decisiv în această privință ne este oferit de conceptul infinitului: infinitul nu apare și nu poate apărea niciodată în procesul observației empirice; totuși, conceptul său pare a fi de neînlăturat din știința matematicii.

Din punct de vedere istoric, este remarcabil faptul că tocmai matematica greacă a făcut pentru prima dată în mod explicit uz de conceptul infinitului, în timp ce întreaga matematică preelenică, a babilonenilor și a egiptenilor nu are nici o cunoștință de această noțiune. În sine, acest unic fapt este suficient pentru a marca distincția decisivă dintre matematica greacă și întreaga știință preelenică. Celelalte două cuceriri ale grecilor, con-

Scanned with OKEN Scanner

ceptul de unghi și teoria proporțiilor[1], nu au aceeași însemnătate, deși au și ele importanța lor proprie, iar conceptul de proporție are, fără îndoială, și o semnificație principială, despre care vom mai avea ocazia să vorbim.

Aceasta înseamnă că ridicarea matematicii la rangul unei „învățături libere" nu se reduce numai la o interpretare filozofică pur exterioară a esenței sale, ci este intim legată de o modificare totală efectuată în interiorul ei. Dar în ce constă, pînă la urmă, această modificare? Se citează în mod frecvent, și pe drept, faptul că matematica greacă a fost prima care a introdus demonstrarea teoremelor enunțate. Rareori se manifestă însă interes pentru motivele care au determinat această turnură. Babilonenii (egiptenii rămîn în această privință în urma lor) au dispus de o algebră foarte dezvoltată, precum și de o geometrie care era satisfăcătoare pentru scopurile lor. Cum au reușit ei să obțină rezultate în aceste discipline matematice fundamentale, fără demonstrație? „Algebra" premergătoare grecilor nu este însă, în fond, decît calcul. Stilul literar al „textelor de exerciții" ale matematicii babilonene coincide, aproape în întregime, cu modul de expunere al cărților noastre actuale de aritmetică calculatorie. Ambele conțin culegeri de exerciții și probleme. Ba mai mult, fără a atrage bănuiala emiterii unor ipoteze prea temerare, putem presupune existența unui flux neîntrerupt al tradiției matematice, care pornește de la culegerile de exerciții și probleme aritmetice din Babilon (poate chiar din Sumer?) și Egipt, și continuă de-a lungul antichității clasice, Islamului, evului mediu bizantin și occidental, precum și de-a lungul epocii „moderne", pentru ca să se ajungă la manualele școlare actuale, chiar dacă noi nu mai cunoaștem astăzi toate inelele acestui lanț al tradiției istorice. În această literatură matematică (de tip oriental), extrem de ex-

---

[1] Matematica premergătoare grecilor nu cunoaște decît noțiunea de înclinație sau pantă. Aceasta corespunde noțiunii de cotangentă a unghiului de înclinație (*šqt* — în egipteană; *ša-gal* — în sumeriană; *ukullu* — în acadiană). În matematica babiloneană exista o expresie pentru raportul sau cîtul a două mărimi numerice (*bandu*), dar nu exista conceptul egalității rapoartelor, adică noțiunea de proporție.

Scanned with OKEN Scanner

tinsă și foarte răspîndită, nu se demonstrează niciodată nimic. În cel mai bun caz se execută o „verificare pe un exemplu". Conceptul de infinit nu apare de loc sau apare numai în forme foarte voalate. În orice caz, el nu ajunge să constituie vreodată o problemă.

Ajungem la aceeași concluzie, luînd în considerare în plus și matematica indiană, precum și cea din răsăritul îndepărtat (în măsura în care acestea par să fie independente de o influență greacă). Nici aici nu întîlnim nici o demonstrație, precum și nici o aplicație explicită a infinitului, măcar în forma inducției complete (raționamentul cu care se trece de la n la $n + 1$).

În această situație prezintă un mare interes urmărirea modalității în care a fost introdus conceptul infinitului în știința greacă timpurie. Se pare că infinitul a apărut întîi în forma unor procese nesfîrșite și convergente. Prezența unor asemenea procese este pentru prima dată atestată, în literatură, la Zenon din Eleea, elevul lui Parmenide. Zenon nu a fost matematician, dar pentru considerațiile sale ia adesea ca punct de pornire fapte și raționamente cu un caracter evident matematic, fapte stabilite încă înaintea lui, probabil de matematicienii școlii pitagoreice.

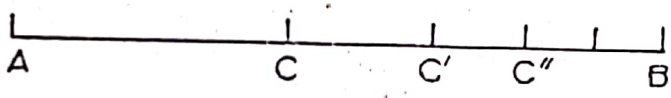


Fig. 1.

Dintre argumentele sale, cel mai simplu este așa-numita „Dihotomie"[2]: un segment AB este împărțit în două părți egale de un punct medial C; jumătatea din dreapta CB este din nou înjumătățită, în punctul de mijloc C' al acesteia; $C'B$ este din nou înjumătățită în C'' și așa mai departe, *fără sfîrșit*. Vom avea, așadar: $AC + CC' + C'C'' + \ldots$ *in infinitum* $= AB$. Punînd $AB = 1$, expresia de mai sus poate fi scrisă acum în felul următor:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1.$$

[2] Zenon, fragm. B 1 și A 25—26 (Diels); ultimele două fragmente conțin informații cu privire la cele două argumente, „Dihotomia" și „Ahile", îndreptate împotriva realității mișcării.

Scanned with OKEN Scanner

În această expresie apare „miracolul“ paradoxal al seriei infinite convergente:

Pe de o parte, seria $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ crește fără întrerupere, strict monoton, și anume cu cîte un termen, care, chiar dacă este mai mic decît cel precedent (termenul următor este exact jumătatea celui precedent, de exemplu $\frac{1}{8}$ este jumătatea lui $\frac{1}{4}$), se află totuși, față de primul termen $\frac{1}{2}$, într-un raport finit care poate fi imediat determinat și exprimat[3] (de exemplu $\frac{1}{8}$ este a patra parte din $\frac{1}{2}$).

Pe de altă parte, seria de mai sus *nu depășește orice margine*, pentru că — fie suma ei compusă dintr-un număr oricît de mare de termeni — valoarea ei rămîne mereu inferioară lui 1. Aceasta, pentru că fiecare termen succesor apare prin înjumătățirea segmentului rămas între suma parțială efectuată și segmentul de lungime egală cu 1. (Astfel, bunăoară, dacă avem $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$, distanța pînă la capătul segmentului, 1, este egală cu $\frac{1}{8}$, jumătatea acesteia fiind $\frac{1}{16}$. Distanța noii sume, formată din patru termeni, pînă la capătul segmentului unitate va fi de asemenea egală cu $\frac{1}{16}$.)

Alternativa „pe de o parte — pe de altă parte“ ce apare în acest fel are, desigur, pentru gîndirea naivă un aspect paradoxal, deși ea nu conține nici o contradicție logică propriu-zisă. Pentru că, dacă ne gîndim bine, este posibil ca ceva să crească neîntrerupt, strict monoton, fără ca totuși să depășească orice limită. Desigur, pentru ca să fie așa, este necesar ca rația creșterii să se micșoreze în decursul timpului într-un mod corespunzător (adică să descrească suficient de repede). Totuși, descreșterea incrementului pînă sub valoarea unei mărimi arbitrar de

---

[3] Zenon atrage atenția asupra acestei împrejurări în fragm. B 1.

Scanned with OKEN Scanner

mici nu este în sine suficientă pentru a asigura convergența, cum arată exemplul seriei „armonice“[4]. Pentru gîndirea naivă a timpurilor străvechi, asemenea considerații cantitative subtile nu puteau juca nici un rol. Intelectul rămîne încă la gîndirea pur calitativă, care în cazul de față se manifestă prin părerea că dacă ceva crește mereu și mereu, atunci odată și odată va trebui să depășească orice limită. Posibilitatea opusă, demonstrată în „Dihotomie“ pe un exemplu concret, trebuia să apară însă ca un paradox.

Zenon a dat acestui exemplu următoarea turnură: creșterea seriei continuă neîntrerupt, fără să ajungă vreodată la capăt, nici chiar într-un interval de timp arbitrar de lung. De aceea, nici alergătorul care pornește din punctul A (vezi figura) pentru a-l ajunge din urmă pe B nu va ajunge niciodată la țintă, pentru că el trebuie să traverseze pe rînd segmentele AC, CC', $C'C''$,..., *in infinitum*, și fiecare din aceste segmente are nevoie de un interval finit de timp pentru a fi parcurs.

Nu stă în intenția noastră să supunem unei discuții amănunțite paradoxele zenoniene, despre care Bertrand Russell a afirmat cîndva că ele sînt „*immensely subtle and profound*“ (de o imensă subtilitate și profunzime) și cu atît mai puțin să le „rezolvăm“, încercare ce nu a reușit nimănui de la Aristotel încoace. Aici ne interesează doar faptul că prima apariție palpabilă a infinitului în matematică și în filozofie a și dus imediat la o emergență a paradoxului. Hegel l-a numit pe Zenon primul dialectician din istoria filozofiei, și de atunci el a fost privit

---

[4] S-ar putea crede că motivul principial al convergenței seriei ar trebui căutat în descreșterea nelimitată a incrementului, care devine pînă la urmă mai mic decît orice mărime arbitrară. Divergența seriei armonice demonstrează însă falsitatea acestei supoziții:

$$\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}} + \dots$$

Precum se vede, această serie crește peste orice limită.

aproape peste tot ca atare. Dar ar fi poate mai bine sau cel puțin mai adecvat din punct de vedere filozofic, să-l considerăm pe Zenon „un filozof al epocii tragediei grecești", să-l punem deci în paralelă cu cei trei mari autori de tragedii din secolul al V-lea î.e.n., precum și cu Pindar, în loc să vedem în el un gînditor „speculativ" în sensul dialecticii hegeliene. Denumirea dată de Hegel conține, totuși, o aluzie obiectivă la ceva ce este esențial. Și anume, ea exprimă opoziția față de o gîndire naivă, rectiliniară. Și, într-adevăr, considerațiile lui Zenon cu privire la seria infinită $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ depășesc cu mult punctul de vedere naiv, simpla „postulare" a ceva, bunăoară în baza intuiției; în această măsură raționamentul zenonian este într-adevăr „dialectic".

Caracterul singular al acestui punct de vedere „dialectic" apare mai clar în contrast cu procedeele matematice care se îndreaptă către scopul propus, așa cum apar ele transmise de sursele vechi orientale și grecești.

În această privință sînt foarte instructive diversele demonstrații ale așa-numitei „teoreme a lui Pitagora" prin metoda descompunerii figurii, metodă care a fost aplicată de matematicienii babiloneni încă la începutul celui de-al II-lea mileniu î.e.n.

Nu ne interesează aici datarea exactă a acestor demonstrații, a căror prezență este confirmată abia de sursele literare ale evului mediu oriental, cu excepția cazului din figura (b), greu de datat, provenit din surse chineze, prezentat în vechea lucrare *Ciu-pei Suan-king*, de dinaintea erei noastre, consacrată problemelor calendarului, precum și cu excepția cazului particular (a), pomenit în dialogul *Menon* (82 b—85 e), al lui Platon[5]. Ne interesează doar faptul, de importanță principială, privind caracterul finit al acestor argumente. În considerațiile introduse sînt utilizate numai un mic număr de domenii plane,

[5] Cunoscuta scenă care a avut loc între Socrate și sclavul lui Menon reprezintă într-o oarecare măsură o lecție de geometrie elementară. Este vorba deci de o temă care a aparținut în epoca lui Platon învățămîntului matematic elementar, deci de un fragment de matematică ce aparține cel tîrziu secolului al V-lea î.e.n.

Scanned with OKEN Scanner

care sînt deplasate în plan, ca atare, în integritatea lor neatinsă. În figurile (a) şi (b) sînt deplasate cele două tipuri de triunghiuri haşurate.

În mod analog sînt alcătuite figurile şi în teoremele 4—6 din cartea II a *Elementelor* lui Euclid, care conţin

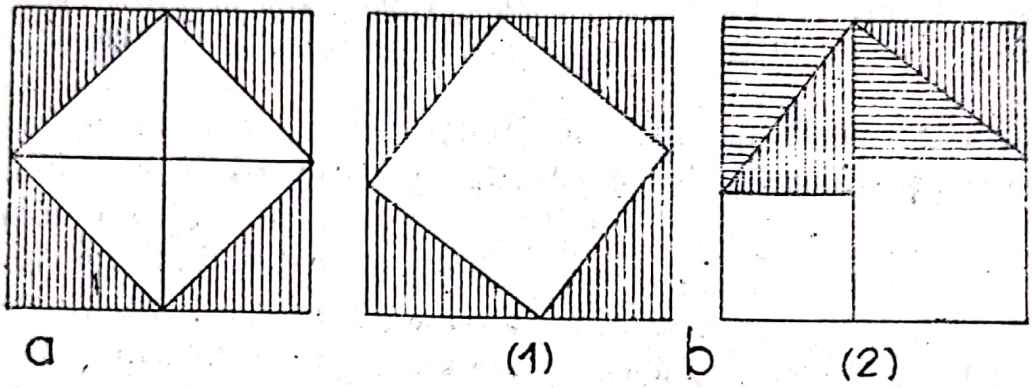


Fig. 2.

rezolvarea ecuaţiilor de gradul doi cu ajutorul unor procedee geometrice constructive[6].

„Dihotomia", şi toate argumentele analoge, diferă de toate celelalte raţionamente finite în mod principial prin aceea că ele reprezintă un proces infinit: descompunerea unui segment finit în părţi, al căror număr creşte indefinit, peste orice limită. Constituie însă un fapt în sine neintuitiv că „în" acest segment finit este „conţinută" o mulţime infinită de părţi. În parte, fiecare segment care apare în decursul acestui proces nesfîrşit de dihotomie poate fi reprezentat sub forma unei figuri intuitive, niciodată însă procesul ca atare, în totalitatea lui. Caracterul infinit al procesului este scos cu claritate în evidenţă de Zenon. Într-adevăr, el spune: „A spune o dată şi mereu, este acelaşi lucru".

Aceeaşi situaţie istorică poate fi ilustrată şi pe alte exemple. Dintre acestea, vom face aici referire numai la unul singur, deosebit de simplu şi de vechi. Este vorba de demonstrarea propoziţiei care stabileşte că succesi-

---

[6] Vezi GM, pp. 11—15; apoi O. Becker, *Das mathematische Denken der Antike*, Göttingen, 1957, pp. 60—64.

unea diferențelor numerelor pătratice consecutive este identică cu șirul numerelor impare:

1 4 9 16 25 36 ...
3 5 7 9 11 ...

Teorema poate fi demonstrată cu ajutorul reprezentării numerelor pătratice prin figuri alcătuite din pietricele (*psēphoi* sau *pessoi*), așa cum indică figura alăturată:

Avem aici o succesiune de figuri finite, dar succesiunea însăși este infinită. Trecerea de la o figură la cea următoare are loc mereu în același fel, și anume prin încadrarea ultimei figuri (din poziția în care le privim) cu cîte un rînd de pietricele de-a lungul laturii din dreapta și de sus. Însăși demonstrația constă în această operație: pentru că numărul pietricelelor ce se adaugă de-a lungul laturii crește la fiecare nou pas cu cîte două.

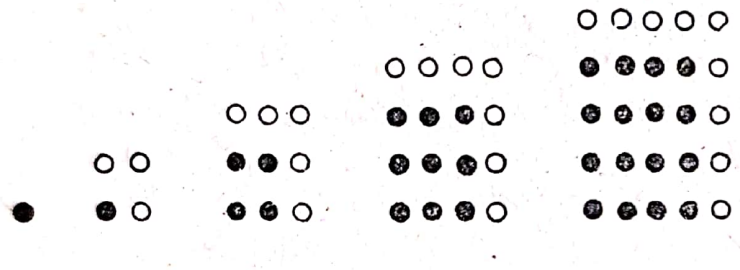


Fig. 3.

Matematicienii greci din epoca timpurie au fost, fără îndoială, pe deplin conștienți de caracterul nesfîrșit al unui asemenea proces. În schimb, se pare că o conștiință analogă nu putea să existe încă la babiloneni. Lipsa unei asemenea conștiințe rezultă, bunăoară, din procedeul aplicat în matematica babiloneană și în arta computațională a vechii Indii — artă dependentă de prima — pentru determinarea rădăcinii pătrate prin aproximații. Valoarea unei rădăcini pătrate $\sqrt{ab}$ (în particular $\sqrt{2} = \sqrt{1 \cdot 2}$) poate fi determinată prin aproximații în așa fel, încît se formează mai întîi media aritmetică m și cea armonică h a valorilor a și b, apoi se caută din nou mediile aritmetice și armonice m' și h' ale celor două valori m și h, apoi se determină din nou aceleași medii m'' și h'' între aceste ultime valori și așa se procedează mai departe, indefinit. Rădăcina care este aproximată astfel este situată între m și h, m' și h', m'' și h''. Diferența dintre cele două medii devine,

desigur, din ce în ce mai mică și, ca urmare, valoarea corespunzătoare va aproxima din ce în ce mai bine valoarea reală[7].

Însă sursele premergătoare matematicii grecești nu conțin nici o indicație asupra faptului că aici am sta în fața unui proces infinit. Mereu sînt efectuați doar primii trei pași ai procesului, și anume pînă la m'' și h''. Apoi calculele încetează. Nu este exclus să fi fost cunoscută posibilitatea de a mai efectua și alți pași conform acelei-așa scheme de calcul. Este însă cel puțin deosebit de îndoielnic dacă a apărut conștiința caracterului nesfîrșit al întregului procedeu, așadar conștiința posibilității de a continua aceeași operație fără încetare.

Oricum ar fi, grecii au cunoscut foarte bine infinitul și importanța fundamentală a acestuia pentru matematică și filozofie. Profunzimea înțelegerii filozofice a marii probleme a infinitului rezultă, înainte de toate, din analiza acestui concept efectuată de Aristotel (*Fizica*, III, 4—8)[8], considerată și astăzi drept clasică. Vom reveni ceva mai departe asupra acesteia, precum și asupra întregului cerc de probleme.

2

Înainte de a da o apreciere critică analizei aristotelice, trebuie să aruncăm o scurtă privire asupra descoperirii, de importanță capitală, a iraționalelor, eveniment semnificativ și totodată fatal pentru matematica greacă. După toate probabilitățile, evenimentul a avut loc pe la mijlocul sau în prima jumătate a secolului al V-lea î.e.n. Există însă păreri printre istoricii matematicii conform cărora această dată trebuie plasată în preajma anului 400 î.e.n. După părerea noastră: fără bază. Pentru că în dialogul *Theaitetos*, dedicat memoriei matematicianului cu același nume din școala lui Platon, dispărut de tînăr, Platon îi atribuie lui Theodoros din Cirene demon-

---

[7] Vezi O. Becker, *Das mathematische Denken der Antike*, p. 64; GM, p. 7.

[8] Vezi GM, p. 65 și urm. (textele aristotelice).

Scanned with OKEN Scanner

strarea iraționalității rădăcinilor pătrate ale valorilor 3, 5, 7, ..., 17. Precum a remarcat, pe bună dreptate, K. v. Fritz, este cu desăvîrșire exclus ca Platon să-i fi contestat lui Theaitetos o descoperire matematică dacă aceasta ar fi fost făcută într-adevăr de el. Încît demonstrația amintită în dialog trebuie atribuită într-adevăr lui Theodoros, a cărui activitate se plasează în preajma anului 430 î.e.n. Dar el a dat o serie întreagă de demonstrații pentru existența unor iraționalități, astfel că rezultatul său nu se mai află la începutul evoluției care a început cu descoperirea unor rapoarte nerationale; acest început trebuie plasat, așadar, înaintea datei respective.

Constituie încă obiectul discuției, care anume a fost acel exemplu concret în cazul căruia s-a remarcat și pe urmă s-a demonstrat incomensurabilitatea reciprocă a două segmente definite pe cale geometrică sau în oricare alt mod. În timp ce mai înainte s-a considerat ca un fapt evident de la sine că incomensurabilitatea laturii pătratului cu diagonala, deci iraționalitatea valorii $\sqrt{2}$, ar fi constituit primul caz în care o asemenea relație a devenit cunoscută, K. v. Fritz (căruia i s-a asociat și G. Junge)[9] este de părere că primul caz în istorie în care incomensurabilitatea ar fi fost remarcată a fost raportul dintre diagonală și latura pentagonului regulat, iar autorul acestei descoperiri ar fi pitagoreicul Hippasos sau cel puțin un contemporan al acestuia.

În favoarea tezei vechi pledează faptul că $\sqrt{2}$ lipsește din șirul rădăcinilor cercetate de Theodoros. Lipsa este motivată dacă presupunem că acest caz particular a fost cunoscut mult mai înainte. Se poate susține, de asemenea, că iraționalitatea rădăcinii $\sqrt{2}$ a fost remarcată nu numai în geometrie, ci și în teoria armoniei muzicale, și anume

---

[9] K. v. Fritz, *The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum*, în „Annals of Mathematics", 48, 1945, pp. 242—264;

G. Junge, *Von Hippasos bis Philolaos*, în „Classica et Mediaevalia", Revue Danoise de Philologie et d'Histoire, vol. XIX, nr. 1—2, 1958, pp. 41—72; vezi în special p. 43 și urm. Junge trimite la G. J. Allman, *History of Greek Geometry from Thales to Euclid*, Dublin, 1879, pp, 42, 138, 213, care a recunoscut pentru prima dată prioritatea pentagramei.

Scanned with OKEN Scanner

cu ocazia cercetării problemei dacă o octavă poate fi împărțită în două intervale egale, exprimabile ambele cu ajutorul unui raport rațional. Pe de altă parte însă, raportul dintre latura și diagonala pentagonului regulat reprezintă o „diviziune continuă“, denumită mai tîrziu cu termenul „secțiune de aur“. Acest raport posedă o caracteristică specifică, anume că în cadrul operației de măsurare a segmentului mai lung prin cel scurt, operație care revine la o „scădere mutuală“ iterată (*antanairesis*)[10], apare cea mai simplă succesiune posibilă de numere naturale, și anume: 1,1,1,...

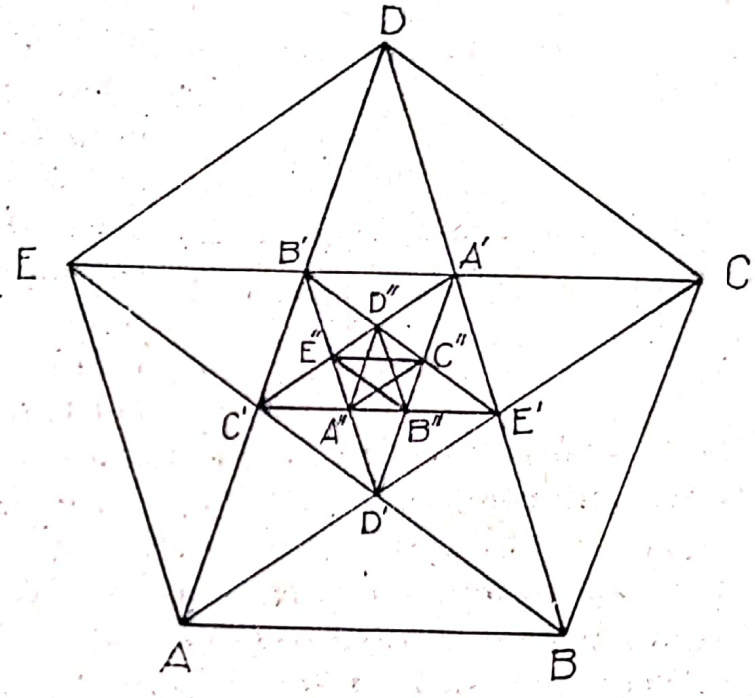


Fig. 4.

Să indicăm aici, pe scurt, calea pur geometrică pe care se poate obține o asemenea demonstrație de incomensurabilitate.

1. În cazul pentagonului regulat, se construiesc toate diagonalele figurii, obținîndu-se astfel o pentagramă. Pentagrama conține în interiorul său din nou un pentagon regulat. Rezultă că aceeași figură se reproduce în interior, fără sfîrșit. Acum se poate încerca măsurarea unei diagonale a pentagonului, de exemplu AC, cu o latură

[10] Aplicînd acest procedeu în compararea a două segmente a și b, se stabilește înainte de toate de cîte ori se află segmentul mai scurt b în cel mai lung a. Cu alte cuvinte, de cîte ori poate fi scăzut segmentul mai scurt b din cel mai lung a. În general, după această scădere rămîne un rest c, care trebuie din nou scăzut din b, de atîtea ori de cîte ori este posibil. În general, apare din nou un rest, d. Acesta va fi din nou scăzut din c, de atîtea ori de cîte ori va fi posibil ș.a.m.d. Dacă raportul $a:b$ este rațional, atunci procedeul se termină după un număr finit de pași, prin aceea că la un moment dat nu va mai apărea nici un rest. Însă în cazul unui raport irațional, procesul nu încetează niciodată.

Scanned with OKEN Scanner

DE, care este paralelă cu diagonala, din motive de simetrie. Patrulaterul $ED'CD$ va fi un paralelogram și vom avea deci $CD' = DE$. Latura DE sau CD' este, așadar, cuprinsă o singură dată în diagonala CA și rămîne ca rest segmentul AD'. Căutînd să măsurăm acum lungimea segmentului AE' (ea însăși fiind egală cu latura DE) cu restul AD', vom obține din nou același rezultat: AD' se află în EA' o singură dată și rămîne ca rest segmentul $E'D'$. Dar acest ultim segment, $E'D'$, este tocmai latura pentagonului interior $A'B'C'D'E'$, și diagonala acestuia $C'A'$ este egală cu $D'A$ (deoarece patrulaterul $AD'A'C'$ este un paralelogram). Reapare, așadar, același raport și procesul „scăderii mutuale" continuă astfel fără sfîrșit. Acest rezultat interesant a trebuit să atragă asupra sa atenția matematicienilor greci din epoca timpurie.

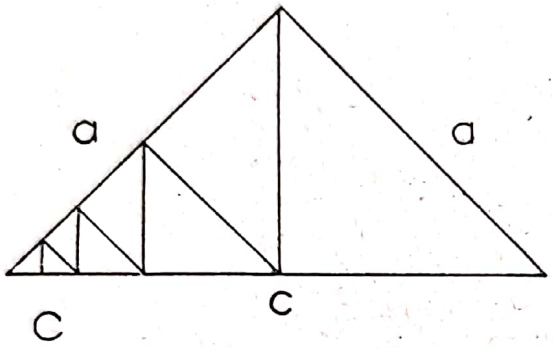


Fig. 5.

2. În cazul pătratului, demonstrarea incomensurabilității diagonalei cu latura poate fi efectuată pe căi diverse. Redăm în cele ce urmează considerațiile lui E. M. Bruins, deoarece ele sînt strîns legate de ideea dihotomiei. La rîndul ei, și aceasta se bazează pe ipoteza divizibilității infinite a segmentului de dreaptă. Să presupunem că în fața noastră se află un triunghi dreptunghi isoscel — jumătatea unui pătrat. Se pune acum problema măsurării lungimii ipotenuzei (a diagonalei pătratului) cu o catetă (latura pătratului). Dacă ar exista o măsură comună care ar putea servi drept unitate de măsură, atunci cateta ar fi măsurată de un număr a și ipotenuza de un număr c de asemenea unități. Deoarece avem $c^2 = 2a^2$, numărul c^2 și, o dată cu acesta, și numărul c vor trebui să fie pare. Acum, înălțimea $h = \frac{1}{2} c$ intersectează ipotenuza tocmai în mijloc, între două segmente elementare (întreaga ipotenuză fiind constituită dintr-un număr par de c asemenea segmente elementare). Repetînd de două ori succesiv operația de construcție a înălțimilor în triunghiurile care apar

Scanned with OKEN Scanner

prin aceste construcții, ajungem din nou la o înjumătățire a segmentului $\frac{1}{2}$ c. După încă două aplicații succesive ale aceleiași construcții, ajungem la înjumătățirea segmentului $\frac{1}{4}c$, apoi la înjumătățirea segmentului $\frac{1}{8}c$ și așa mai departe, peste orice limită. Dar numărul natural c nu poate fi înjumătățit peste orice limită, fără a nu ajunge o dată sau la un număr impar, sau la unitate. De aici urmează însă că în această „fugă" punctul de înjumătățire nu va mai fi situat la un moment dat între două segmente elementare, ceea ce este absurd (deoarece c este compus dintr-un număr par de segmente elementare)[11].

În cadrul unor asemenea considerații iese la iveală opoziția dintre număr *(arithmos)* și mărime continuă *(megethos)*. Mărimea continuă este indefinit divizibilă prin înjumătățiri reiterate (dihotomie), în timp ce numărul nu este indefinit divizibil. Începînd cu autorii antichității tîrzii pînă la comentariile lui Proclus la *Elementele* lui Euclid, divizibilitatea infinită este pusă în legătură cu existența unor rapoarte iraționale. Legătura logică exactă între acestea este însă următoarea: dacă mărimile extensive (segmentele spațiale și temporale) nu sînt divizibile indefinit, atunci nu poate exista nici un raport

---

[11] Se poate da și o demonstrație pur aritmetică iraționalității expresiei $\sqrt{2}$, bunăoară în felul următor: se poate presupune că prin simplificări succesive cu 2, raportul $a:b$ a fost pînă la urmă adus la o formă în care nu mai sînt ambele numere a și b simultan pare (adică divizibile cu 2). Să presupunem că numărul a este par; atunci va fi par și numărul a^2, și anume divizibil cu 4. În consecință, atît partea din dreapta cît și cea din stînga ale ecuației $a^2 = 2b^2$ pot fi împărțite cu 2, și după aceasta, în partea stîngă va mai rămîne tot un număr par (a^2 fiind divizibil cu 4, rezultă că $\frac{1}{2}\cdot a^2$ este de asemenea divizibil, cu 2). Vom avea astfel în stînga semnului de egalitate un număr par, iar la dreapta numărul impar b^2, ceea ce este imposibil. Dacă însă presupunem că a este un număr impar, atunci ecuația $a^2 = 2b^2$ este din capul locului imposibilă, deoarece a^2 este, împreună cu a, impar, or $2b^2$ este sigur par.

Această demonstrație se bazează pe teoria simplă și veche a *parului* și *imparului* și nu are nevoie de nici o teoremă din domeniul teoriei generale a numerelor și în mod special de teorema cu privire la unicitatea descompunerii în factori primi a numerelor întregi.

Scanned with OKEN Scanner

irațional. Invers, ipoteza divizibilității indefinite nu constituie în sine o condiție suficientă pentru existența unor rapoarte iraționale. Divizibilitatea indefinită permite existența rapoartelor iraționale, dar existența acestora nu decurge în mod necesar din această proprietate a segmentului de dreaptă.

Pentru demonstrarea existenței segmentelor incomensurabile pe cale geometrică este deci neapărată nevoie de demonstrații particulare, efectuate și pe alte căi (de exemplu, prin metodele teoriei armoniei muzicale). Se pare însă că această împrejurare nu a fost întotdeauna destul de bine înțeleasă de toți autorii.

Propoziția care enunță că prin înjumătățiri succesive se poate ajunge la segmente mai mici decît orice segment arbitrar (Euclid, *Elemente*, X, 1; vezi și Aristotel, *Fizica*, III, 6, 206 b, 17-20) a jucat un rol fundamental în metoda exhaustiei lui Eudoxiu. Această metodă apare în *Elemente* pentru prima dată în cartea XII, în demonstrarea unei teoreme fundamentale privind cercul (*Elemente*, XII, 2). Exhaustia (*dapanan* = *exhaurire* „a goli, a epuiza") a fost aplicată și de Antifon, și de către sofiști (fragm. B 13), și chiar de către Anaxagora (A 38, vezi B 3). Prin înscrierea în cerc a unor poligoane regulate cu un număr mereu crescînd de laturi, laturile acestora vor deveni în mod corespunzător din ce în ce mai scurte și se vor apropia din ce în ce mai mult de periferie și astfel cercul ar putea fi oarecum „golit", la fel ca un vas golit de lichidul pe care-l conține. Ceva mai tîrziu, Bryson a încercat să aproximeze cercul prin înscrierea și circumscrierea simultană a unei succesiuni de poligoane regulate. La baza acestei încercări a stat un principiu specific de continuitate exprimat de Platon (*Parmenide*, 161 d): „Dacă ceva poate fi (relativ) mai mare și mai mic, atunci poate fi și egal și poate fi situat și între cele două extreme". *Toate* poligoanele înscrise sînt însă mai mici, în timp ce *toate* poligoanele circumscrise sînt mai mari decît cercul. „Dar, dacă în raport cu ceva, *există* atît ceva mai mare cît și ceva mai mic, atunci *există* în raport cu același lucru și ceva ce-i este egal. Dar există poligoane mai mari și poligoane mai mici decît cercul, există așadar și un poligon egal cu cercul"

Scanned with OKEN Scanner

(Proclus). Circumferința trebuie echivalată apoi tocmai cu acest poligon „egal".

Valabilitatea acestui principiu al continuității a fost rezervată încă în antichitate numai unor sisteme de mărimi omogene, ceea ce și-a găsit expresia în introducerea „axiomei lui Arhimede" (o propoziție care a fost introdusă și aplicată încă de Eudoxiu; vezi E u c l i d *Elemente*, V, 4). Antichitatea a cunoscut și sisteme de mărimi nearhimedice. Așa a fost, bunăoară, sistemul mărimilor atașate unghiurilor rectiliniare și mixte (unghiuri de contingență)[12].

Poziția actuală în privința fundamentelor analizei infinitezimale poate fi exprimată în următoarele: din axioma lui Arhimede urmează o teoremă fundamentală, conform căreia orice punct arbitrar al dreptei sau orice număr real poate fi cuprins între două puncte, respectiv numere, raționale, oricît de apropiate. Aceste puncte raționale pot fi, desigur, obținute prin diviziunea segmentului în părți egale. Reciproca acestei teoreme nu mai este însă o consecință imediată și evidentă a teoremei directe. O împărțire a unui segment dat în intervale succesive, dintre care fiecare cuprinde în întregime intervalul următor, nu determină întotdeauna, „de la sine", un punct care să aparțină tuturor intervalelor ce se includ reciproc, ca niște cutii din ce în ce mai mici. Existența unui asemenea punct trebuie asigurată în mod explicit printr-un postulat. Această postulare este făcută de așa-numita „axiomă a lui Cantor"[13].

O asemenea axiomă se pare că nu a fost niciodată general admisă de greci; ei au admis asemenea propoziții existențiale numai în acele cazuri individuale în care existența obiectelor în chestiune a fost asigurată sau făcută cel puțin plauzibilă datorită unor motive de ordin geometric. Acesta este cazul, de exemplu, cu existența cercului situat între cele două succesiuni de poligoane înscrise și circumscrise, sau cu existența segmentului de parabolă în cvadratura binecunoscută a parabolei, efectuată de Ar-

---

[12] Pentru detalii, vezi GM, pp. 43—55.

[13] Vezi GM, p. 245 și urm. (despre G. Cantor), p. 254 și urm. (despre P. Du Bois-Reymond). Dintre manualele moderne, amintim aici O. H a u p t și G. A u m a n n, *Differential-und Integralrechnung*, I, *Einführung in die reelle Analysis*, Berlin, 1948, pp. 10—12.

Scanned with OKEN Scanner

himede. O asemenea configurație geometrică simplă, cum este cercul sau parabola, posedă în ochii matematicianului grec o existență evidentă, datorită caracterului său intuitiv și datorită obișnuinței. Or, asemenea argumente au avut efecte mult mai puternice asupra grecilor — și, mai tîrziu, chiar asupra unui spirit cum a fost Kepler — decît au ele astăzi asupra noastră. Noi definim astăzi configurațiile geometrice curbe ca fiind limite ale unei succesiuni infinite de figuri rectiliniare, pe care le considerăm elementare (de cele mai multe ori ca simple linii frînte, compuse din segmente drepte). De exemplu, cercul este definit ca limita succesiunii infinite de poligoane înscrise. Constituie în sine o problemă, desigur, dacă acest procedeu, astăzi general aplicat, este pînă la urmă satisfăcător sau nu. Critica neointuiționistă a analizei infinitezimale clasice a răscolit din nou această problemă. Dar despre aceasta vom discuta mai tîrziu.

3

Acum vom vorbi despre concepțiile lui Aristotel — atît de mult citate — cu privire la conceptul infinitului și al continuității, deoarce considerațiile Stagiritului au avut o influență ce se lasă simțită în toate domeniile, pînă și în cercetările actuale de fundamente ale matematicii.

Fără a intra în amănunte, se poate constata înainte de toate că Aristotel interpretează nemărginitul *(apeiron)* ca ceva „ce există numai în potență“ (ca o pură posibilitate, *dynamei on*) sau, după un comentariu al lui Simplicius, ca ceva „ce-și are existența în însuși actul devenirii“. Potențialitatea infinitului nu are deci aceeași natură ca și potențialitatea legată de o anumită substanță (de exemplu, a bronzului care nu a fost încă turnat pentru a fi o statuie), o stare de potențialitate care încetează prin trecerea în starea de actualitate. Potențialitatea infinitului este ca cea „a zilei sau ca cea a jocurilor olimpice“, evenimente care revin și se repetă mereu. (Aristotel se gîndește aici, pe cît se pare, la însăși scurgerea zilei, respectiv a jocului, dar totodată și la necontenita reîntoarcere și repetare a zilelor și a jocurilor olimpice în

Scanned with OKEN Scanner

decursul timpului, care este măsurat chiar în raport cu acestea. După Aristotel, însuși timpul nu este decît acel element al unei mișcări care poate fi numărat.)

Infinitul se manifestă în operația însăși a adăugirii și a descompunerii sau, ceea ce este același lucru, în scăderea necontenită a unei mărimi mai mici din una mai mare. Schema fundamentală a acestei operații neîntrerupte este dihotomia binecunoscută, care generează seria geometrică $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+$ ... Acest proces poate fi generalizat, în sensul că în locul raportului 1 : 1, care apare între părțile segmentului dat în urma unei diviziuni dihotomice, să adoptăm alte valori, de exemplu 2 : 1 sau 3 : 2, care să exprime raportul segmentelor ce apar în urma diviziunii efectuate pe segmentul ce rămîne ca rest în urma diviziunii precedente. Așa se întîmplă în cazul paradoxului zenonian cunoscut sub numele de „Ahile și broasca țestoasă“[14].

Procedeul urmat aici este următorul: împărțind segmentul-rest după raportul numeric $p : q$, întregul segment-rest va fi compus, desigur, dintr-un număr de $p + q$ unități, din care un număr de p segmente vor fi mereu adăugate sumei parțiale obținute pînă în acel moment. Însumarea permanentă se desfășoară deci după același ritm ca și diviziunea, și invers; în timp ce restul care rămîne, și care este mereu supus diviziunii iterate, devine din ce în ce mai mic, suma parțială crește mereu cu același număr de părți ale restului.

Dacă în domeniul mărimilor din ce în ce mai mari, obținute prin procesul adăugirilor, al compunerii permanente, nu există infinitul în act (deoarece, după Aristotel, lumea este mărginită de firmament — sfera stelelor fixe), într-un anumit sens există un asemenea infinit în act, „în mic“, în domeniul diviziunii. Pentru că un segment dat poate fi împărțit fără sfîrșit, bunăoară prin dihotomii reiterate, și în cursul acestei diviziuni însuși segmentul pare să rămînă în fața noastră ca un întreg dinainte dat. Desigur, după părerea lui Aristotel, segmentul

---

[14] Sursa principală pentru acest paradox este Aristotel, *Fizica*, III, 6, 206 a, 13 și urm. (trad. în l. română a apărut în Editura Științifică, București, 1966).

Scanned with OKEN Scanner

nu este în mod efectiv compus din puncte sau din elemente componente liniare (atomi liniari), ci punctele apar pe segment abia în urma efectuării operației de diviziune. Cu alte cuvinte, ele există înainte de diviziune numai într-o stare de potență și abia în urma diviziunii cîștigă existență actuală. Această idee poate fi generalizată acum în sensul următor (ceea ce nu se găsește însă la Aristotel): o asemenea existență potențială poate fi atribuită nu numai punctelor „raționale" — deci acelora ce apar în urma unei diviziuni a segmentului în părți egale — ci și acelor puncte care apar în urma unor construcții geometrice bine definite; așadar, pot fi luate în considerare, eventual, și puncte „irașionale". Dacă pe diagonala unui pătrat se măsoară un segment egal cu latura, atunci apare un punct care împarte diagonala în două segmente parțiale, care nu se află între ele într-un raport rațional. Firește, în considerațiile lui Aristotel irașionalele nu intră în această conexiune. Irașionalele apar la el doar în cadrul unor aluzii ocazionale, la demonstrarea aritmetică a incomensurabilității diagonalei pătratului cu latura. Abia în lucrarea *De lineis insecabilibus*, inclusă în *Corpus Aristotelicum* (autorul acesteia fiind însă, probabil, Teofrast) este amintită existența segmentelor incomensurabile, ca un argument împotriva ipotezei unor atomi liniari (969 b, 33—970 a, 4; vezi, de asemenea, 968 b, 5—21 și 969 b, 6—12).

Pentru o concepție principială, sistematică asupra „continuității", este foarte important să reținem că, după Aristotel, segmentul nu este compus din puncte, ci mulțimea infinită a punctelor se află „în el" numai în modalitatea pură a unei posibilități, în sensul că ele pot fi generate în urma unei operații de diviziune sau prin intermediul unui alt procedeu matematic cu caracter constructiv[15].

---

[15] Concepția fundamentală a lui Aristotel cu privire la existența pur potențială a punctului într-un segment dat face ca axioma de completitudine a lui Cantor să fie imposibil de inclus în matematica greacă și, în aceste condiții, rămîne neclar modul în care acest fapt poate fi pus în concordanță cu admiterea evidentă de către greci a unui principiu de continuitate pentru mulțimi de mărimi „omogene".

Scanned with OKEN Scanner

Acestei viziuni aristotelice îi este radical opusă concepția analizei „clasice", în forma în care aceasta este, de obicei, exprimată în manualele utilizate în zilele noastre. Această concepție se bazează pe „teoria mulțimilor" elaborată de Georg Cantor, pentru care segmentul drept constituie o mulțime de puncte actual infinită; punctele sînt astfel date împreună cu segmentul, ele există efectiv în acesta, iar diviziunea sau alte construcții asemănătoare nu fac decît să le identifice ulterior cu scopul de a le supune unor considerații. Cercetările moderne în domeniul fundamentelor matematicii — sub influența determinantă a criticii „intuiționiste", precum și pe baza altor considerente — se reîntorc însă într-o serie de puncte esențiale la concepția lui Aristotel.

Chiar dacă autorii moderni care susțin puncte de vedere critice (de exemplu, P. Lorenzen) se dau înapoi de la o reformă radicală a analizei și se străduiesc să conserve conceptul tradițional al continuității într-o măsură cît mai mare, în ciuda acestor strădanii se conturează, totuși, de pe acum posibilitatea unei viziuni radical „neoaristotelice" a conceptului de continuitate.

Să mai adăugăm la toate aceste considerații următoarea remarcă: ideile fundamentale ale concepției aristotelice cu privire la infinit, ca o simplă potențialitate, joacă un rol esențial la Kant, în teoria antinomiilor, exercitînd chiar un efect decisiv și integral, în mod special asupra „soluției" primelor două antinomii cosmologice, așa-numitele antinomii „matematice" (ele se referă la problema caracterului finit sau infinit al lumii în extinderea sa spațială și în durata sa temporală, precum și la caracterul finit sau infinit al divizibilității timpului și spațiului)[16].

4

Precum am mai arătat, caracteristica fundamentală a matematicii, în concepția lui Aristotel, este „abstracția";

[16] Vezi K a n t, *Kritik der reinen Vernunft*, ed. a 2-a, p. 545 și urm. (Dialectica transcendentală; Antinomia rațiunii, 9, §§ I și II).

Scanned with OKEN Scanner

în legătură cu aceasta însă, Stagiritul este într-o opoziție netă cu Platon, după care obiectele matematice, în privința modalității lor existențiale, ocupă un loc intermediar între universul de idei și lumea lucrurilor accesibile simțurilor. Însuși termenul de „abstracție" provine din expresia genuină „*aphairesis*" (a lua ceva dintr-o unitate mai mare, a abstrage) utilizată de el, cuvîntul latin „*abstractio*" fiind o traducere literală a expresiei grecești. În textele filozofice germane din secolul al XVIII-lea se utilizează expresia de „concepte scăzute" *(abgezogenen Begriffen)*.

Conceptul însuși de „abstracție" are însă o dublă semnificație. Abstracția înseamnă în primul rînd o operație prin care sînt lăsate la o parte anumite laturi sau trăsături ale obiectului cercetat, în așa fel încît rămîne numai un număr redus de trăsături asupra cărora se va concentra apoi atenția. Acesta este sensul primar în care termenul „*aphairesis*" este utilizat de Aristotel. Dar conceptul de abstracție cuprinde totodată în sine și o altă semnificație, și anume aceea a ridicării la concepte mai generale, la acele concepte pe care Aristotel le numește „*ta koina*", comunul, o expresie aplicată cu precădere termenilor generali din domeniul matematicii.

Nu este însă cu totul clară poziția lui Aristotel față de un al doilea moment al conceptului de abstracție, o latură care la Platon este atît de pregnant scoasă în evidență, și anume idealizarea. Desigur, și Aristotel știe foarte bine că rigla nu atinge cercul material numai într-un singur punct [17], cum trebuie să se întîmple în cazul conceptului pur geometric al tangentei, dar el nu acordă nici o importanță acestei deosebiri și o pomenește numai în treacăt. Unicul moment al procesului cognitiv care este supus unui tratament sistematic de către Aristotel este operația de disociere, de despărțire *(chorismos)*, efectuată de gîndire asupra unor lucruri care sînt, în sine, imposibil de despărțit. Iată cuvintele sale proprii: „Astfel, obiectele matematice care în sine sînt neseparate sînt gîndite într-o stare de separație, în gîndire"[18].

---

[17] *Met.*, B 2, 998 a, 2 și urm.
[18] *De anima*, III, 7, 431 b, 15 și urm.

Scanned with OKEN Scanner

În această privință, matematicianul se află în opoziție atît față de „fizician“ (adică filozoful naturii), cît și față de „primul filozof“ (adică metafizicianul). Reprezentanții acestor două discipline din urmă studiază un obiect în felul său concret, deoarece, după Aristotel, fizica este concentrată asupra studiului universului existenței, asupra obiectelor supuse transformării, iar metafizica se dedică cunoașterii esențelor eterne și imuabile. Ambele domenii sînt însă esențe substanțiale *(ousiai)*, deși independente. Obiectul matematic își dobîndește însă o existență abia în urma activității spirituale de abstracție, efectuată de matematician, precum susține Aristotel în argumentațiile sale frecvente, care îmbracă adesea un ton polemic[19]. În această concepție aristotelică se găsește ascuns un prim sîmbure al unei orientări spre „nominalismul“ epocilor ulterioare, chiar dacă nominalismul evului mediu tîrziu va poseda și alte trăsături. De asemenea, viziunea aristotelică conține în sine — lucru uimitor pentru un gînditor antic — și un oarecare element „subiectivist“. Obiectele matematice apar de-a dreptul ca avînd existență în gîndire, și totuși ele sînt despărțite de obiectele concrete numai în gînd, și nu pot exista în sine într-o stare disociată de purtătorul lor.

Se poate spune că această concepție „nominalistă“ mai constituie și astăzi opinia cea mai răspîndită cu privire la esența elementului specific matematic, și nu numai la majoritatea oamenilor de știință care cercetează fenomenele naturii, ci chiar și la foarte mulți matematicieni, în mod special în lumea anglo-saxonă. Astfel, de exemplu, Bertrand Russell a abandonat foarte repede poziția sa platoniciană, pe care a avut-o inițial, pentru a adopta un punct de vedere orientat într-o mai mare măsură în sens empirist, deși, mai tîrziu, nu mai manifesta aceeași atitudine negativă generală față de admiterea oricărui concept aprioric. În această orientare anglo-saxonă pot fi evidențiate motive empiriste proprii, provenind din tradițiile filozofiei engleze. Printre acestea, gnoseologia

---

[19] O colecție a fragmentelor respective se găsește în GM pp. 118—121.

Scanned with OKEN Scanner

lui D. Hume constituie o ramură deosebit de influentă. Într-o oarecare măsură această tendinţă empiristă este compensată de una formalistă, în mod special din momentul în care logica matematică (aşa-numita „logistică“) a cîştigat teren considerabil şi în interiorul matematicii însăşi.

Aceste consideraţii ne conduc din nou înapoi la cea de-a doua interpretare a termenului de „abstracţie“, conform căreia abstracţia este echivalentă cu o ascensiune către un grad mai înalt de generalitate. Şi anume, nu ne gîndim aici la generalizarea obişnuită, deci la o ascensiune către specii superioare de o mai mare extensiune, ci la procesul de formalizare, care îşi extinde efectele peste toate domeniile materiale şi asupra tuturor speciilor supreme asociate acestora, „depăşindu-le“ în acest fel. „Nici singularul şi nici existentul (ca atare) nu constituie o specie“, sună cuvintele binecunoscute ale lui Aristotel [20]. Ele se referă într-un mod „analog“ la domenii de naturi diferite. În această orientare către formalism nu este vorba numai de o tendinţă pur filozofică, ci de una care aparţine chiar interiorului propriu al matematicii. Există două exemple fundamentale, de care se serveau, de obicei, autorii antici pentru a ilustra „ştiinţa generală a matematicii“. Înainte de toate, un grup de propoziţii fundamentale cu privire la egalitate şi inegalitate, de exemplu, ca: „şi dacă din egale se scad egale, cele rămase sînt egale“ ş.a.[21]. În al doilea rînd, un grup de propoziţii provenind din teoria generală a proporţiilor, aşa cum a fost stabilită aceasta de către Eudoxiu şi în formularea în care apare în cartea V a *Elementelor* lui Euclid. Ambele grupuri de propoziţii au în matematica antică o funcţie importantă. O importanţă deosebită au însă operaţiile cu proporţii. Diversele transformări ale proporţiilor joacă rolul unui adevărat agent care vehiculează înaintarea activităţii de gîndire în raţionamentul matematic, ime-

---

[20] *Met.*, B 3, 998 b, 22; vezi şi H 6, 1045 b, 2—7.

[21] Aici intră în consideraţie, înainte de toate, „*koinai ennoiai*“ ale lui Euclid. Termenul grec este de obicei tradus prin expresia „noţiuni comune“; rămîne însă nedecis dacă este vorba de reprezentarea unor obiecte cu caracter general, sau de anumite concepţii răspîndite printre oameni, sau de amîndouă.

Scanned with OKEN Scanner

diat ce, în cadrele matematicii geometrizate a epocii „clasice“ greceşti, se face abstracţie de figura considerată şi se trece la efectuarea inferenţelor care pornesc de la această figură.

La Aristotel se găsesc deja multe reflecţii cu privire la specificul „general“ matematic. El face, de exemplu [22], observaţia că înainte, teorema cu privire la posibilitatea de a schimba între ei mezii şi extremii unei proporţii a fost separat demonstrată pentru numere, pentru segmente, corpuri, şi intervale de timp *. Acum însă, continuă Aris-

---

[22] *Anal. Prior.*, I, 5, 74a, 17—25.

* O proporţie stabileşte o egalitate între două rapoarte $a:b = A:B$ şi se compune deci din patru termeni. Se numesc *mezi* termenii situaţi lîngă semnul de egalitate, deci, în exemplul de faţă termenii b şi A sînt mezi; ceilalţi doi termeni, aici a şi B, situaţi la extremităţi se numesc extremi. Mezii şi extremii pot fi schimbaţi între ei. Aceasta înseamnă că dacă $a:b = A:B$ este o proporţie, deci dacă raportul $a:b$ este egal cu raportul $A:B$, atunci şi $B:b = A:a$ va fi o proporţie, deci şi raportul dintre A şi a va rămîne egal cu raportul dintre B şi b. Teorema nu este de loc atît de evidentă cum se pare la prima vedere şi cum ne fac să credem exemplele numerice particulare cu care ne-am obişnuit. Va fi suficient să amintim doar un singur exemplu, de mare importanţă în istoria matematicii. Fie, de pildă, a şi b ariile a două cercuri cu raze diferite, iar A şi B fie ariile celor două pătrate ridicate pe razele lor. Prima formă a proporţiei enunţă acum că *ariile celor două cercuri sînt între ele în acelaşi raport ca şi ariile pătratelor ridicate pe raze.* Forma a doua spune însă că aria a, unui cerc, este în acelaşi raport cu aria A, a pătratului ridicat pe raza sa, ca şi aria cercului b, cu aria pătratului B, ridicat pe raza acestuia din urmă. Dar aceasta înseamnă că *raportul dintre aria cercului şi aria pătratului ridicat pe rază nu depinde de lungimea razei şi păstrează aceeaşi valoare constantă, în toate cazurile.* Această valoare a fost notată cu litera π, prima literă a cuvîntului elen *perifereia.* Or, grecii nu au reuşit să exprime valoarea acestui raport $\pi = a:A = b:B =$ cu ajutorul unui raport a două numere naturale (astăzi ştim că acest lucru nici nu este posibil), deşi există cazuri cînd raportul $a:b = A:B$ este în mod evident raţional. Or, în aceste condiţii nu mai este de loc simplu să se demonstreze posibilitatea de a schimba între ei mezii şi extremii. Această demonstraţie generală, care *face abstracţie de raţionalitate rapoartelor egalate* prin proporţia în chestiune, a fost dată pnntru prima oară — şi într-o manieră de o neîntrecută eleganţă — de către Eudoxiu din Cnidos. Abia în posesia acestei demonstraţii avem dreptul să scriem formula cunoscută pentu aria a, a unui cerc cu raza $r: a = \pi r^2$, şi să spunem că aria a, a cercului, este egală cu *produsul dintre aria* r^2, cu care am notat pătratul ridicat pe rază, şi *o constantă*, notată convenţional cu litera π, care este egală cu raportul dintre

Scanned with OKEN Scanner

totel (făcînd o aluzie evidentă la teoria proporţiilor a lui Eudoxiu), demonstraţia este efectuată în general (deodată pentru toate genurile de mărimi). Pentru că relaţia în chestiune nu se mai referă la segmentele şi corpurile ca atare, ci la „ceea ce este luat ca întreg“ [23]. Într-un alt loc, Aristotel se exprimă [24] din nou că matematicianul are în vedere numai ceea ce are existenţă prin abstracţie (omitere conştientă), luînd în consideraţie obiectele de diverse categorii (din punctul de vedere al formei lor, cum sînt punctele, dreptele, suprafeţele, corpurile) numai din punctul de vedere al laturii lor cantitative şi al caracterului lor continuu [25] şi nimic în afară de acestea. În mod analog este privit în „prima filozofie“ orice obiect din punctul de vedere al existenţei ca atare. Se vede clar: conceptul matematic abstract nu dispune de independenţa („substanţialitatea”) obiectelor metafizice. Cu toată această deosebire, există, totuşi, o afinitate între matematica generală şi ontologia generală, datorită caracterului formal al amîndurora, ceea ce a şi contribuit mai tîrziu la formarea ideii unei „*Mathesis universalis*“.

Nu este locul să intrăm aici în detaliile dezvoltării istorice a acestor idei [26]. Amintim doar că neoplatonicienii (şi în această privinţă comentariile lui Proclus la *Elementele* lui Euclid pot servi ca un exemplu tipic) [27] au scos mereu în evidenţă caracterul neintuitiv al acestei mate-

---

aria *oricărui* cerc şi cea a pătratului ridicat pe raza sa. Existenţa unui asemenea raport constant trebuie însă demonstrată în prealabil. — *N.T.*

[23] Expresia utilizată de Aristotel „ca întreg“ (*katholou*) nu are, aici, semnificaţia unei generalizări în sensul unei ascensiuni la specii de ordin superior, ci ea este utilizată în sensul unei adevărate formalizări.

[24] *Met.*, K 3, 1061a, 28—b6.

[25] „*kata to poson kai to syneches*“. Termenul „*poson*“ este utilizat aici mai curînd cu semnificaţia conceptului de număr discret, în opoziţie cu noţiunea de mărime continuă, deşi această terminologie, frecvent utilizată (ea apare şi la neopitagoricieni), nu este specific aristotelică.

[26] Pentru unele detalii, vezi O. Becker, *Mathematische Existenz*, Halle a.S., 1927, p. 254 (pentru epoca antică); p. 264 şi urm. (pentru epoca modernă).

[27] În privinţa poziţiei neoplatonice, vezi GM, p. 121 şi urm.

Scanned with OKEN Scanner

matici generale și au considerat-o ca o formă spirituală superioară a științei.

În epoca modernă, începînd cu sfîrșitul secolului al XVI-lea, cu Viète și mai tîrziu cu Descartes, apare o formă nouă a matematicii, liberă de figura geometrică precum și de limitarea impusă de utilizarea valorilor numerice particulare. După cîteva încercări prealabile incomplete, Viète introduce calculul literal, numit de el „*Algebra speciosa*“, care a atins însă abia cu Descartes nivelul unui simbolism complet. La acesta din urmă, ea capătă o formă care diferă numai în privințe neesențiale de modul actual de scriere. Simbolurile literale ale acestei „*Algebra speciosa*“ au o semnificație generală; ele pot reprezenta atît numere pure, cît și segmente, suprafețe, corpuri, intervale de timp, greutăți ș.a.m.d. Avem deja, în fața noastră, „formula“ atît de caracteristică pentru tot ceea ce este matematic.

Descartes a înțeles imediat cu toată claritatea aplicabilitatea lor universală, ceea ce își găsește expresia lipsită de echivoc în conceptul fundamental de „*Mathesis universalis*“ introdus de el. Marea sa contribuție matematică cu caracter pozitiv este fundamentarea geometriei analitice, prima aplicație a acestei „*Mathesis universalis*“ la un domeniu particular determinat, aplicație cu consecințe de o uriașă prodigiozitate. În fizică, Descartes a fost mai puțin norocos, cu toate că a fost deosebit de fertil în producerea „ipotezelor“. În acest domeniu, unicul său rezultat ce a rămas în picioare este legea refracției luminii. Huyghens și Newton au fost în această privință deschizători de drumuri noi într-un sens cu totul diferit. Dar ei nu s-au servit încă pe deplin de noua metodă analitică, ci mai lucrau cu procedee geometrice, iar Huyghens a mai utilizat aproape exclusiv numai metode de acest fel, recurgînd parțial și la metodele „grafice“ ale evului mediu tîrziu. Așa a mai procedat și Newton, în marea sa lucrare fundamentală, *Principia*.

Abia cu Leibniz s-a ajuns la o „*Mathesis universalis*“ lipsită de acum de orice barieră. În timp ce Descartes mai rămîne mereu geometru (chiar dacă un „geometru analitic“), Leibniz apare ca aritmeticianul sau algoritmicianul universal, dacă este permis să ne exprimăm în acest

Scanned with OKEN Scanner

fel. Să ne gîndim numai la următoarea afirmație: „Nu există nimic care să nu fie supus numărului. De aceea numărul constituie, într-o privință, o categorie metafizică fundamentală, iar aritmetica un fel de statică a universului în care se destăinuiesc forțele sale“[28]. Pentru întreaga viziune matematică a lui Leibniz este caracteristic felul în care a conceput el calculul infinitezimal, elaborat în 1673, deci abia la opt ani după ce Newton descoperise (în 1665) calculul fluxiunilor, dar în mod independent de acesta. Calculul lui Leibniz sta însă, din punct de vedere formal, adică în privința notațiilor utilizate, mult deasupra calculului newtonian și tocmai de aceea a și cîștigat preponderență în practica matematică. Simbolurile introduse de Leibniz, „diferențialele“ (dx, dy, dt etc.), mai conțin un moment intuitiv naiv, ceea ce înlesnește înțelegerea lor, deși acest element intuitiv nu trebuie luat întotdeauna în serios, și nici chiar Leibniz nu le-a acordat această semnificație[29]. Mai departe, o altă trăsătură specifică a creației leibniziene trebuie căutată în descoperirea conceptului de determinant, în care zărim primul pas către o teorie a invarianților.

De o importanță deosebită este descoperirea de către Leibniz a conceptului de funcție (însuși numele de „funcție“ provine de la el), precum și, în mod special, interpretarea principială — esențială și dintr-un punct de vedere filozofic — a conceptului de reprezentare, termen introdus de asemenea de el și care are dubla semnificație a reprezentării unui obiect printr-o imagine sau, invers, a reprezentării, a realizării unui concept prin intermediul unui obiect real, al unui model. Se poate spune de-a dreptul că toate firele grandiosului sistem filozofic leibnizian se intersectează de fapt în acest concept. Astfel, de exemplu, monadele constituie „oglinda“ universului,

---

[28] Leibniz, *Philosophische Schriften*, ed. Gerhard, VII, p. 184.

[29] Să ne gîndim, bunăoară, la conceptul de derivată (cîtul a două diferențiale) dy/dx, care se află într-o analogie formală cu un cît veritabil; ea provine, într-adevăr, dintr-un asemenea cît printr-o operație de trecere la limită, și totuși nu este un cît veritabil, obișnuit.

Scanned with OKEN Scanner

iar raportul dintre lumea divină — lumea absolut clară şi inteligibilă a ideilor — şi lumea gîndirii umane limitate şi lipsite de claritate este ilustrat de Leibniz cu ajutorul unei comparaţii matematice: la fel precum o hiperbolă ce se extinde la infinit poate fi reprezentată prin intermediul unei proiecţii centrale adecvat alese (determinată geometric de conul generator), pe o elipsă, deci pe o curbă situată în întregime în domeniul finitului, tot aşa ne putem imagina şi universul infinit al ideilor divine proiectat în lumea finită a reprezentărilor umane. În această parabolă a oglinzii, Leibniz are în vedere oglinzi curbe, care redau obiectul original în imagini deformate şi micşorate: în acest fel se oglindeşte macrocosmul divin în monadele umane. În al treilea rînd, este de asemenea de o mare importanţă principială analogia reprezentării obiectului original corporal prin intermediul unor imagini perspective plane, luate succesiv din diferite puncte şi de la distanţe felurite, ca aspectele diverse în care apare acelaşi oraş, văzut din diverse locuri. De aici rezultă că fiecare monadă individuală are cîte o altă viziune asupra universului.

Din exemplele citate pînă acum (care pot fi adîncite şi mărite la număr)[30], rezultă cît de adînc se împleteşte filozofia cu matematica în gîndirea lui Leibniz. Deşi nu putem urmări aici mai departe această idee în detaliile sale, trebuie să amintim, totuşi, de o realizare a lui Leibniz cu un efect foarte important asupra dezvoltării viitoare: calculul logic.

Leibniz elaborează un „*Calculus logicus*“, denumit adesea şi „*Calculus ratiocinator*“ sau „*universalis*“, care îşi are însemnătatea atît în demonstrarea teoremelor date, cît şi în inventarea unor noi propoziţii prin aceea că transformă relaţiile abstracte de o complexitate de-a dreptul incomprehensibilă, în simboluri („caractere“) intuitive. Acest calcul are rolul de a ne oferi o cale pentru eliminarea erorilor de raţionament şi de a aduce o decizie rapidă şi inatacabilă în toate divergenţele de opinii, deoarece gîndirii obişnuite i se substituie astfel un algoritm

---

30 Vezi D. Mahnke, *Leibnizens Synthese von Universalmathematik und Individualmetaphysik*, Halle a.S., 1925.

Scanned with OKEN Scanner

de calcul ușor de verificat în detaliile sale. Pe de altă parte, calculul logic poate servi și ca un fel de „fir al Ariadnei", care să ne conducă la noi descoperiri. Leibniz se putea referi în această privință la succesele sale obținute în domeniul calculului diferențial și integral, atît de bine reușite tocmai din punct de vedere algoritmic datorită unei notații simbolice sugestive și adecvate scopului urmărit. El se gîndea la modele ideale pentru sistemele deductive care ar putea fi aplicate la orice material posibil.

Ideea leibniziană a unei *Mathesis universalis* depășea cu mult concepția carteziană omonimă. În timp ce filozoful francez se gîndea la o știință generală a mărimilor cantitative, Leibniz a extins din capul locului această idee, dîndu-i semnificația unei științe universale a „formelor de ordine", cuprinzînd în sfera ei și relații cu caracter pur calitativ. Analiza combinatorie, creată de el, a fost de asemenea cuprinsă aici. Noua matematică trebuia să aibă un caracter riguros deductiv și trebuia să fie scrisă și exprimată cu ajutorul semnelor grafice precise ale unei „*Characteristica universalis*". Astfel trebuia să fie construită o „*Algebra universalis*", avînd două ramuri principale: „logistica" și „caracteristica combinatorie", adică o matematică simbolică a cantității și a calității.

Din aceste planuri și proiecte de mari proporții, numai puține au fost elaborate în detaliu. Printre acestea, în afara unei „*Analysis situs*" (mai mult o presimțire a calculului vectorial decît topologia — ceea ce se înțelege astăzi prin acest termen) se mai află și o formalizare matematică a logicii.

Dacă notele manuscrise ale lui Leibniz cu privire la acest ultim domeniu sînt privite cu ochi critici[31], atunci ne vom da seama că el a introdus înainte de toate calcule logice de diverse tipuri, bazate atît pe o concepție intensivă (calcul elementar al predicatelor sau calcul al proprietăților), precum și pe o concepție extensivă (algebra claselor sau a mulțimilor). Nu lipsesc, de asemenea, nici

---

[31] Trebuie să atragem aici atenția cititorului asupra lucrării substanțiale a lui N. Rescher, *Leibniz's Interpretation of his Logical Calculi*, în „Journal of Symbolic Logic", 19, 1954, pp. 1—13.

Scanned with OKEN Scanner

aplicații ale unui asemenea calcul la logica propozițiilor, care este interpretată într-un mod felurit de diverși comentatori moderni; bunăoară, K. Dürr o interpretează ca un calcul propozițional clasic, cu două valori; N. Rescher, ca un „*Calculus of strict implication*" în sensul lui C. I. Lewis, așadar ca un calcul modal[32]. Este remarcabil în mod deosebit faptul că în 1690 Leibniz a dat și o reprezentare abstract-formală, conștientă, calculului său, conceput ca o teorie „a celui ce conține și a ceea ce este conținut" *(de continente et contento)*. Împreună cu aceasta, el a dat totodată și prima teorie a unei structuri booleene abstracte, cu circa 150 de ani înaintea lui G. Boole. Este demn de remarcat, de asemenea, faptul în sine că Leibniz s-a ridicat pînă la un asemenea înalt grad al abstracției.

În principiu, cu aceste realizări leibniziene a fost deschisă calea către acea dezvoltare extinsă, multilaterală și bogată în efecte pe care avea s-o cunoască matematica în secolele imediat următoare.

5

Este imposibil să descriem aici creșterea de vaste proporții pe care a cunoscut-o matematica în diversele sale discipline, din ce în ce mai puternic ramificate, în decursul secolelor XVIII, XIX și XX. O asemenea descriere este și mai dificilă datorită faptului că mai toate relatările istorice se încheie[33] în preajma anului 1800. Să amintim, pe scurt, doar următoarele evenimente:

---

[32] K. Dürr, *Neue Beleuchtung einer Theorie von Leibniz: Grundlegung des Logikkalküls*, în „Leibnizarchiv", II, Darmstadt, 1930; N. Rescher, *op. cit.*, în *loc. cit.*

[33] Prelegerile deosebit de atractive ale lui F. Klein, *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Berlin, 1926/27, constituie o primă încercare în această privință. Avînd în parte un caracter pronunțat autobiografic, acestea nu sînt, firește, lipsite în multe privințe de aprecieri subiective. O privire generală, desigur foarte sumară, este dată de J. E. Hofmann, în Becker-Hofmann, *Geschichte der Mathematik*, Bonn, 1951, p. 237 și urm.

Scanned with OKEN Scanner

În secolul al XVIII-lea nu au apărut numai sistemul calculului diferențial și integral, ci și calculul variațional, precum și primele începuturi ale unei teorii a ecuațiilor diferențiale ordinare cu derivate parțiale, împreună cu problemele la limită pe care le involvă. Geometria diferențială face de asemenea progrese însemnate. În secolul al XIX-lea toate aceste ramuri ale matematicii vor fi dezvoltate și sistematizate. Ca o disciplină nouă apare teoria funcțiilor de o variabilă complexă, împreună cu teoria funcțiilor eliptice și a celorlalte funcții de tip superior. Apare geometria proiectivă și, ceva mai tîrziu, urmează și alte multiple forme de discipline geometrice, care ne duc cu mult dincolo de spațiul intuitiv al geometriei noastre clasice „euclidiene", ca să dea pînă la urmă naștere unei teorii generale a invarianților față de grupurile de transformări în varietăți n-dimensionale. În mod special se dezvoltă teoria grupurilor, ca o disciplină abstractă, aplicabilă în domenii cu totul diferite (ca, pe de o parte, teoria ecuațiilor algebrice, iar pe de altă parte teoria ecuațiilor diferențiale, pe urmă — precum am mai amintit — geometria, iar mai tîrziu fizica teoretică). Teoria numerelor va fi pusă pe noi fundamente și extinsă în proporții gigantice în mod special în urma includerii în domeniul ei a numerelor complexe. Teoria rezolvabilității ecuațiilor algebrice cu radicali, apărută la începutul secolului al XIX-lea, se dezvoltă în a doua jumătate a secolului al XIX-lea și în secolul al XX-lea, transformîndu-se în disciplina algebrei abstracte, care conține algebra numerică a epocii clasice sub forma unui caz particular.

Din punct de vedere filozofic, este deosebit de importantă teoria mulțimilor, elaborată de G. Cantor, care a avut curajul de a înlătura teza aristotelică cu privire la natura pur potențială a infinitului, teză acceptată pînă atunci, cu rare excepții, de toți matematicienii (printre aceștia trebuie amintit, de exemplu, B. Bolzano), și să creeze o teorie a infinitului actual, considerat astăzi ca fundamentul unui mare număr de discipline matematice speciale. Dintre disciplinele abstracte care s-au dezvoltat în decursul secolului al XX-lea, ar mai trebui amintită teoria „structurilor" (a rețelelor), legată strîns de struc-

Scanned with OKEN Scanner

tura formală a logicii matematice, în care așa-numitele „rețele distributive“ joacă un rol important.

Dar, chiar dacă ne-am angaja să intrăm în mai multe detalii și să descriem amănunțit structura și conținutul disciplinelor multiple pomenite în cele precedente, nu am putea cuprinde, totuși, nici chiar într-o asemenea descriere, o trăsătură deosebit de importantă, chiar decisivă a matematicii secolelor XIX și XX, dacă nu am intra în detaliile istorice ale apariției și dezvoltării bogate a cercetărilor privind fundamentele matematicii. Aici apare un veritabil punct de cotitură în întreaga atitudine generală a științelor matematice, care, chiar dacă nu este lipsită de precursori antici de o factură asemănătoare, a fost totuși înăbușită mai tîrziu de alte orientări.

O butadă celebră a unui matematician din secolul al XVIII-lea spune: „*Allez en avant et la foi vous viendra*!“ (Mergeți înainte și credința va veni pe parcurs!) Se avansează cu curaj, și fără să se țină cont de nimic, în construirea unor teorii analitice din ce în ce mai cuprinzătoare; se operează cu configurații ce se extind la infinit, analog formelor corespunzătoare finite (de exemplu, cu seriile infinite se operează după reguli analoge celor din operațiile cu sumele finite), abandonîndu-ne în întregime unui „simț tactil matematic“ și lăsînd, desigur, cu totul la o parte fundamentarea riguroasă a metodelor aplicate. O asemenea avansare lipsită de critică și de reflexiune a dus, între altele, la contradicții în cazul unor serii infinite.

Unul din exemplele cunoscute este și următorul: care este suma seriei infinite: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$?

Pe de o parte avem:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) = \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0.$$

Pe de altă parte însă avem, de asemenea:

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots = 1 - 0 - 0 - 0 - \ldots = 1.$$

Aplicînd procedee de calcul în aparență cu totul legitime, ajungem, totuși, la două rezultate diferite și contradictorii.

Scanned with OKEN Scanner

Asemenea apariții au dus în epoca de trecere de la secolul al XVIII-lea la secolul al XIX-lea la apariția unei conștiințe critice care s-a străduit să determine limitele raționamentului matematic. Nu în mod întîmplător această cotitură spirituală are o desfășurare paralelă în timp cu cotitura pe care a adus-o pe plan filozofic abandonarea dogmatismului rațional al urmașilor lui Leibniz și acceptarea criticismului intelectual al lui Kant.

Aici se află și sîmburele cercetărilor îndreptate spre fundamentele matematicii, care încep încă în secolul al XVIII-lea și anume pe tărîm geometric o dată cu cercetările lui Saccheri și Lambert cu privire la axioma paralelelor, iar pe tărîmul analizei cu „calculul derivatelor" stabilit de Lagrange, care a avut ca scop să dea o fundamentare riguroasă și ireproșabilă calculului diferențial, evitînd conceptul de „infinit mic" al diferențialei. În decursul secolelor XIX și XX cercetarea fundamentelor se transformă într-o disciplină cuprinzătoare, după ce a străbătut mai multe stadii și după ce și-a schimbat de mai multe ori problematica centrală.

Din punctul de vedere al expunerii noastre este important că în acest cadru a apărut un vast și cuprinzător cerc de probleme, orientate spre efortul de a da un răspuns la întrebarea cu privire la limitele gîndirii matematice, o întrebare care posedă simultan mai multe dimensiuni diferite, de natură matematică și filozofică. Și astfel, mai departe, atenția noastră va fi îndreptată asupra dezvoltării acestor probleme.

●

Să aruncăm acum o ultimă privire asupra concluziilor acestui capitol! Grecii, probabil primii pitagoreici, au conceput matematica în mod conștient ca o „știință liberă", care are o existență în sine și pentru sine, analog unui om liber și nu unui sclav! Privită din punctul de vedere al structurii sale matematice proprii, matematica greacă se deosebește de cea din epocile premergătoare ale Orientului antic printr-o acceptare conștientă a infinitului. Matematica premergătoare grecilor operează cu compararea, diviziunea și deplasarea unui număr finit (foarte

Scanned with OKEN Scanner

mic) de domenii plane finite, avînd forme elementare ușor accesibile; ele se reduc, în esență, la dreptunghiuri și la triunghiuri dreptunghice (făcînd abstracție de apariția ocazională a unor poligoane regulate). Întreaga algebră babiloneană, în mod special rezolvarea ecuațiilor cvadratice, poate fi interpretată în acești termeni geometrici, precum o arată, de asemenea, și cartea II a *Elementelor* lui Euclid — carte care conține cel mai vechi material al *Elementelor*. Matematica greacă descoperă însă procesul infinit (și anume seria geometrică infinită) fără îndoială prima dată pe exemplul dihotomiei, precum arată fragmentele rămase de la Zenon din Eleea. Urmează a doua mare descoperire, aceea a iraționalelor, o realizare care a făcut ca matematica greacă și tot ce provine din ea să se deosebească în mod fundamental de tot ce nu aparține sferei matematicii elene.

Aristotel este teoreticianul care a elaborat filozofia infinitului. El însuși a văzut esența infinitului în posibilitatea de a continua fără întrerupere un anumit proces. După părerea lui, infinitul nu poate avea altfel de existență decît în domeniul posibilității pure, „în potență". A doua teză fundamentală a sa privește însăși existența matematică. În opoziție cu Platon, Stagiritul consideră că abstracția constituie baza existenței matematice. Aceasta înseamnă că el nu concepe figurile matematice ca fiind alcătuite în sine și prin sine dintr-o esență substanțială, ci vede în ele obiecte care au apărut din corpurile fizice concrete printr-un proces de despărțire, de abstracție *(aphairesis)*. El le consideră, cu alte cuvinte, ca obiecte ale gîndirii, produse ale spiritului uman (și, poate, chiar divin). El concepe esența obiectelor matematice „generale" într-o dependență specifică cu această teorie a abstracției; de exemplu, proporțiile, în sensul teoriei lui Eudoxiu, le consideră drept un stadiu superior al abstracției, care nu are caracterul obișnuit al unei operații de generalizare, ci caracterul specific al unei formalizări.

În acest punct — întregit cu anumite realizări ulterioare din antichitatea tîrzie — se face legătura cu noua matematică occidentală, cea a secolului al XVII-lea, care este în esență o „*Mathesis universalis*", și care, bazîndu-se pe calculul literal al lui Viète, pe geometria analitică a

Scanned with OKEN Scanner

lui Descartes și pe proiectele temerare ale lui Leibniz cu privire la elaborarea unor calcule universale, s-a lărgit în următoarele trei secole, devenind o știință puternică, complex ramificată și din ce în ce mai formalizată.

Dar acest elan nestăvilit al progresului a dus, precum arată în mod special analiza infinitezimală a secolului al XVIII-lea, la acte imprudente, care au avut ca urmare apariția unor contradicții. Ca o urmare pozitivă, apar conștiința critică și tendința unei autolimitări, din care apoi apare însăși cercetarea fundamentelor matematicii. Și astfel ajungem, în sfîrșit — precum am arătat mai sus — la o nouă problemă, aceea privind *limitele gîndirii matematice*, problemă căreia vrem să-i consacrăm ultimul capitol al cărții noastre.

Scanned with OKEN Scanner

IV

Limitele gîndirii matematice

Întrebarea multilaterală cu privire la limitele gîndirii matematice poate fi împărțită în două părți.

Pe de o parte apare în interiorul însuși al matematicii o întrebare cu privire la problematica generală a inferenței matematice. Această latură a problemei este într-o dependență directă de cercetarea fundamentelor, ea fiind o expresie a trezirii la conștiință și a autolimitării gîndirii matematice. Ea rămîne totuși în întregime „imanentă", adică se desfășoară în întregime în însuși interiorul gîndirii matematice specifice și tocmai de aceea cercetarea acestei probleme se face cu mijloace specific matematice (partea A).

Pe de altă parte se pune însă și întrebarea, prin excelență filozofică, cu privire la limitele gîndirii matematice în general. Această problemă poate fi supusă cercetării numai cu mijloace pur filozofice. Rezolvarea ei nu mai poate fi căutată în interiorul matematicii, oricît de mare ar fi extensiunea pe care am acorda-o acestei științe (partea B).

A. LIMITELE IMANENTE ALE MATEMATICII

1

Întrebarea cu privire la limitele imanente ale matematicii reprezintă doar una din laturile problemei generale

Scanned with OKEN Scanner

cu privire la limitele gîndirii matematice în general; totuşi, ea însăşi se divide în laturi şi aspecte multiple. Tocmai de aceea calea cea mai adecvată de a ne face o idee despre ea va fi aceea pe care o obţinem urmărind firul dezvoltării istorice a cercetării fundamentelor matematicii în decursul secolelor XIX şi XX. Urmărind această evoluţie istorică, vom fi nevoiţi ca într-o oarecare măsură să separăm, totuşi, în interiorul ei, cele două mari domenii pe terenul cărora se desfăşoară cercetarea fundamentelor: geometria, pe de o parte, aritmetica şi analiza, pe de alta.

Înainte de toate, să aruncăm o privire asupra cercetării fundamentelor geometriei. Făcînd abstracţie de precursorii antici*, aceasta începe în epoca modernă, în secolul

---

* Autorul se referă aici la Proclus (secolul al V-lea e.n.), precum şi la cîţiva alţi precursori mai vechi, citaţi de acesta în *Comentariile* sale la prima carte a *Elementelor* lui Euclid. Cel mai vechi autor pomenit în această ordine de idei de Proclus este Poseidonios, care a activat în secolul I î.e.n. (Un text arab, îndoielnic însă ca sursă de informaţie, pomeneşte în termeni vagi şi de Arhimede, ca de primul matematician elen care s-ar fi ocupat de problema paralelelor.) Vorbind de „precursorii antici" cercetători ai fundamentelor geometriei, ale căror preocupări au fost axate aproape exclusiv pe axioma şi problema paralelelor, se are mereu în vedere succesiunea de autori care începe cel mai devreme cu Poseidonios (despre opera căruia Proclus ne informează în termeni deosebit de vagi), deci autori care s-au ocupat de problema paralelelor în intervalul dintre secolul I î.e.n. şi circa secolul al VI-lea e.n. Preocuparea lor a fost sporadică şi de intensităţi diferite. Printre aceşti autori, cei mai însemnaţi sînt, înainte de toate, însuşi Proclus şi astronomul Claudiu Ptolemeu. Din cartea acestuia, consacrată special problemei paralelelor, Proclus citează pasaje ample şi esenţiale. Aşadar, „precursorii antici" şi-ar fi început activitatea cel mai devreme cu două secole după elaborarea *Elementelor* lui Euclid (circa 300 î.e.n.). O preocupare intensă şi susţinută cu mai multă continuitate începe apoi în evul mediu, în cercul matematicienilor din sfera de cultură a Islamului, care se extinde pe intervalul dintre secolele X şi XIII. Această perioadă este încheiată în secolul al XIV-lea de remarcabila lucrare a lui Gersonides (Levi ben Gerson) din sudul Franţei, primul matematician occidental care s-a ocupat cu problema paralelelor. Rezultate remarcabile au obţinut în această epocă matematicienii persani Omar Khayam şi Nasreddin Tusi.

Este însă demn de remarcat faptul că cercetările consacrate fundamentelor geometriei au apărut în matematica elenă cu cel puţin jumătate de secol înaintea lui Euclid. Vestigiile acestora se

Scanned with OKEN Scanner

al XVIII-lea, o dată cu cercetările lui G. Saccheri (1733) și J. H. Lambert (1766) cu privire la axioma paralelelor, respectiv postulatul V al lui Euclid. Această propoziție afirmă că două drepte (coplanar convergente) se intersectează dacă sînt prelungite peste orice limită. Această axiomă a fost privită încă în antichitate ca mai puțin evidentă decît celelalte; există referiri în această privință, de exemplu la curba hiperbolei. Aceasta, deși converge către asimptotele sale, nu le intersectează, totuși, niciodată. Din moment ce acest postulat suscită îndoieli, au apărut încercări de a-l demonstra. Aceste încercări, dintre care unele deosebit de ingenioase, nu au dus însă la rezultatul dorit nici în antichitate, nici în evul mediu arab și occidental și nici în epocile care au urmat. Matematica secolului al XVII-lea, care i-a depășit pe antici într-o măsură însemnată, a rămas, totuși, ineficientă în această problemă. Nu reieșea decît mereu substituirea postulatului V cu o propoziție echivalentă, avînd un mai mare grad de plauzibilitate, cum ar fi, bunăoară, aserțiunea cu privire la existența figurilor asemenea, de mărimi diferite (J. Wallis, 1663).

Apoi, în secolul al XVIII-lea, Saccheri a ajuns, precum am mai amintit, la ideea că alături de „ipoteza" existenței unor dreptunghiuri, adică a unor patrulatere avînd toate cele patru unghiuri egale cu un unghi drept (o propoziție echivalentă cu postulatul V), mai pot fi considerate încă alte două ipoteze, care enunță existența unor patrulatere cu cîte două unghiuri drepte, celelalte două, ambele egale între ele, fiind totodată sau obtuze sau ascuțite. Raționamente analoge a emis ceva mai tîr-

---

regăsesc în numeroase fragmente din *Corpus Aristotelicum*. Cercetările matematicienilor eleni din această epocă sînt, în privința nivelului gîndirii, mult deasupra „precursorilor antici" (și chiar și arabi) de mai tîrziu. În privința concluziilor filozofice, de natură metamatematică, geometrii eleni din epoca lui Aristotel se ridică chiar și deasupra nivelului lui Saccheri. În orice caz, rezultatele concrete obținute de ei coincid într-o măsură foarte mare cu rezultatele lui Saccheri. Se poate vedea, pentru detalii, I. T ó t h, *Das Parallelenproblem im Corpus Aristotelicum*, în „Archive for History of Exact Sciences", Berlin — Heidelberg — New York, 1967, pp. 249—422. — *N.T.*

Scanned with OKEN Scanner

ziu și Lambert*. S-a arătat că geometriile corespunzătoare acestor trei ipoteze, adică geometria euclidiană și cele două geometrii „neeuclidiene“ (precum au fost numite acestea în secolul al XIX-lea), pot fi dezvoltate oricît, fără să se ajungă la vreo contradicție. Dar Saccheri credea că pînă la urmă cele două geometrii neeuclidiene vor putea, totuși, să fie reduse la absurd. Critica ulterioară a refuzat însă să accepte demonstrațiile respective. Se pare însă că Lambert a mers mult mai departe: el a arătat mai întîi că în ambele geometrii neeuclidiene ar trebui să existe cîte o măsură absolută (așa cum în geometria euclidiană există o măsură absolută a mărimii unghiulare: unghiul drept), ceea ce sună paradoxal, dar nu conține nici o contradicție. Pe de altă parte, el a arătat că geometria de pe suprafața sferei și geometria de pe suprafața unei „sfere“ cu raza imaginară[1] reprezintă, într-un sens, realizările celor două geometrii neeuclidiene, în două dimensiuni. Acestora le-ar corespunde sistemele unei trigonometrii sferice, respectiv ale unei trigonometrii „hiperbolice“, dintre care prima se bazează pe cunoscutele funcții ciclometrice (sinus, cosinus etc.), în timp ce a doua pe funcțiile hiperbolice corespunzătoare. Apoi, în secolul al XIX-lea, Gauss, Bolyai și Lobacevski au construit în mod sistematic geometria neeuclidiană de tip hiperbolic, iar mai tîrziu, Riemann, pe cea de tip eliptic și alte tipuri încă, mult mai generale. În fine, F. Klein a demonstrat consistența acestora** prin reprezentarea lor

---

* Aceste ipoteze se găsesc deja la geometri contemporani lui Aristotel. — *N.T.*

[1] E. Beltrami a arătat în lucrarea sa *Saggio di interpretazione della geometria noneuclidea*, apărută în 1868, că această geometrie hiperbolică poate fi realizată pe suprafața unui corp în formă de șa sau trompetă, așa-numita „pseudosferă“ (această ultimă formă a pseudosferei poate fi obținută prin rotația unei curbe, numită *tractrice*, în jurul asimptotei sale ca axă).

** F. Klein, ca de altfel toți ceilalți autori, au demonstrat doar consistența relativă a sistemului geometriei hiperbolice. Teorema lui F. Klein poate fi formulată în felul următor: *dacă* în sistemul de propoziții al geometriei *hiperbolice* se găsesc două care se *contrazic* formal, *atunci* în mod necesar se vor găsi și în sistemul geometriei *euclidiene* două propoziții *contradictorii*. Cu alte cuvinte: *dacă* geometria hiperbolică este contradictorie, *atunci* este în mod necesar

Scanned with OKEN Scanner

la anumite configurații ale geometriei proiective și a introdus întreaga problematică în domeniul teoriei grupurilor[2].

Ne punem acum întrebarea: apare oare undeva, în cadrul acestei evoluții spirituale, o limită a matematicii? Oare nu se îmbogățește domeniul geometriei prin aceasta cu discipline complet noi, care au un caracter matematic tot atît de riguros ca și vechea geometrie euclidiană? Oare nu tocmai datorită acestei evoluții și în urma transformării geometriei într-o teorie abstractă a invarianților, în varietăți cu un număr arbitrar de dimensiuni s-a ajuns la un stadiu cu totul nou al întregii matematici, caracterizată printr-un grad mai înalt al abstracției și printr-o pătrundere mai adîncă a formalizării?

Trebuie să admitem că este așa. Dintr-un punct de vedere pur interior, încă nu putem vedea în toate acestea o limită a cunoașterii. Rezultă doar atît, că, pe cît se pare, matematica în sine nu este în stare să determine în mod univoc natura spațiului, adică natura spațiului intuitiv, natura acelui spațiu care stă la baza teoriilor fizice și astronomice[3]. Totuși, lucrurile stau și aici analog ca în fizica teoretică: renunțarea la anumite cunoștințe,

---

contradictorie și geometria euclidiană; respectiv: *dacă geometria euclidiană este consistentă, atunci nici în sistemul geometriei hiperbolice nu se pot găsi două propoziții formal contradictorii.* Astfel, consistența geometriei hiperbolice este *relativă*, ea fiind garantată de consistența geometriei euclidiene și raportată la aceasta. Este important de știut că *reciproca* propozițiilor precedente a fost demonstrată în 1831 de I. Bolyai, care a arătat că, și invers, *consistența geometriei euclidiene este garantată de consistența geometriei hiperbolice.* Construind un *model* al geometriei euclidiene în spațiul hiperbolic, el a demonstrat că *dacă* în geometria euclidiană ar exista două propoziții contradictorii, *atunci* și sistemul hiperbolic ar fi contradictoriu. In consecință: dacă geometria hiperbolică este consistentă, atunci consistentă trebuie să fie, în mod necesar, și geometria euclidiană. Astfel iese cu multă pregnanță în evidență caracterul relativ al consistenței sistemului geometriei. — *N.T.*

[2] Vezi, în privința acestei evoluții, GM, pp. 168—223.

[3] Să ne gîndim la cunoscutele cuvinte ale lui Gauss, din scrisoarea sa către Bessel, din 9 aprilie 1830: „Trebuie să recunoaștem cu smerenie că în timp ce numărul este un produs exclusiv al spiritului nostru, spațiul are realitate și în afara spiritului nostru, pentru că nu-i putem prescrie toate legile *a priori*".

considerate la început ca fiind evidente, poartă în sine consecințe fertile pentru întreaga știință, luată în ansamblul ei.

Din punct de vedere logico-matematic, apare aici într-adevăr o fundamentală schimbare în structura geometriei și, la fel ca în celelalte discipline matematice, o transformare ce poate fi urmărită cel mai pregnant în modul cum au fost privite bazele ei axiomatice.

În antichitate, axiomele și postulatele (nu este nevoie să facem aici nici o distincție între aceste două tipuri de propoziții fundamentale) erau privite ca propoziții generale și evidente, care tocmai de aceea, pe drept, puteau fi considerate de către toată lumea ca adevărate. (Îndoiala s-a ivit numai față de postulatul V al lui Euclid, precum se va vedea mai jos.) În matematica de orientare critică a secolului al XIX-lea, axiomele devin ipoteze, adică premise libere, în sensul că sîntem liberi de a le accepta sau nu. De aceea a spus o dată în glumă Bertrand Russell că matematica ar fi o știință care tratează despre lucruri despre care nu știe ce sînt, vorbind în propoziții despre care nu știe dacă sînt adevărate sau false. Această poziție este susținută, bunăoară, de începutul lucrării cunoscute a lui Hilbert, *Fundamentele geometriei* (1899): „Gîndim trei sisteme diferite de obiecte. Să numim *puncte* — obiectele primului sistem..., *drepte* — obiectele celui de-al doilea..., *plane* — obiectele celui de-al treilea sistem. Acceptăm de asemenea în gînd că aceste obiecte — *puncte*, *drepte*, *plane* se află în anumite relații între ele și vom însemna aceste relații prin cuvinte, ca, de exemplu: «se află pe», «este situat între», «paralel», «congruent», «continuu»; descrierea exactă a acestor relații și caracterizarea lor completă pentru scopuri matematice este dată abia *de* și *prin* axiomele geometriei". Nu aflăm din această descriere nici ce sînt aceste trei feluri de „obiecte" (respectiv „sisteme"), și nici ce sînt acele „anumite relații", asupra cărora se vor face apoi anumite afirmații în decursul considerațiilor ce vor urma, afirmații care nu vor fi, totuși, fundamentale sau motivate, astfel încît nu vom putea ști dacă ele corespund obiectului descris și dacă, în general, există un asemenea obiect.

Scanned with OKEN Scanner

În timp ce în axiomatica „naivă", transmisă din antichitate de *Elementele* lui Euclid, sensul conceptelor utilizate și adevărul propozițiilor fundamentale (axiomelor) este asigurat pe cale intuitivă, secolul al XIX-lea abandonează cu desăvîrșire acest tip al teoriei axiomatice concrete. Apar și sînt îmbrățișate teorii deductive pure, în care conceptele nedefinite nu mai sînt legate de interpretări determinate. Mai mult, este chiar permis să se presupună că ele se referă la obiecte cu totul arbitrare sau chiar la nimic concret. Un caracter cu totul arbitrar au, de asemenea, și „teoremele" deduse din axiome, iar problema posibilității lor de interpretare rămîne în întregime deschisă. De acum înainte nu mai este vorba, așadar, de un sistem concret intuitiv sau interpretabil, ci de unul formal-abstract [4].

Oricum ar fi, în acest tip al unui sistem formal-deductiv (numit adesea și „sistem ipotetico-deductiv"), cel puțin sensul noțiunilor și al relațiilor logice care intră în joc în cadrul procedeelor deductive este acceptat ca fiind intuitiv clar și inteligibil și, de asemenea, regulile logice utilizate în demonstrarea teoremelor sînt acceptate ca valabile și evidente. Această atitudine mai conține însă o anumită doză de naivitate. Ne putem ridica însă la nivelul suprapus al unui nou tip de sistem „pur formal", în care nici demonstrarea teoremelor nu se mai face după legile logice evidente, ci în baza unor reguli cu totul arbitrare; aceste reguli trebuie să fie însă enunțate explicit și aplicate cu consecvență. Această condiție a „consecvenței în acțiune" mai conține însă un element „logic" care nu poate fi eliminat pe nici o cale, și la care nici nu se mai poate renunța în mod arbitrar.

Ajungem astfel la conceptul unui „calcul cu totul arbitrar", pe care vrem să-l prezentăm aici pe un exemplu ce provine de la P. Lorenzen [5].

---

[4] Vezi H. B. Curry și R. Feys, *Combinatory Logic*, I, Amsterdam, 1958, pp. 12—13. „Obiectele" unui asemenea sistem formal extrem sînt cu totul lipsite de specificitate; cu alte cuvinte, ele nu aparțin nici unei categorii logice determinate (vezi p. 257 și urm.).

[5] P. Lorenzen, *Formale Logik*, Sammlung Göschen, nr. 1176/1176a, Berlin, 1958, p. 58 și urm.

Scanned with OKEN Scanner

Calculul lui Lorenzen se ocupă de „figuri“ lipsite de orice semnificație. Aceste figuri pot fi compuse din figuri elementare, așa-numiții „atomi“, care ne stau la dispoziție (respectiv pot fi produși) într-un număr oricît de mare; figurile elementare sînt juxtapuse sau scrise într-un rînd, succesiv, una lîngă alta.

Avem deci:

1. atomii ● și ○ (în acest scop pot fi luate, de exemplu, jetoanele negre și albe ale jocului de table),
2. unica figură fundamentală ● (K 1),
3. cele două reguli fundamentale:

$$x \rightarrow x\,○ \quad (K2)$$
$$x \rightarrow ●\,x● \quad (K3).$$

Litera x în cele precedente reprezintă o variabilă care poate fi înlocuită cu orice figură compusă din atomi. Semnificația verbală a săgeții plasate între două figuri x și y, adică $x \rightarrow y$, este următoarea: „dacă este dată figura x, atunci figura y poate fi și ea construită“ (adică ea poate fi scrisă sau construită cu ajutorul jetoanelor). Figura fundamentală ● ($K1$) este dată de la început.

Pentru a lămuri mai bine lucrurile, dăm în cele ce urmează un exemplu pentru o „deducție“ în acest calcul (în care, desigur, nu este vorba de o *de*ducție logică propriu-zisă, ci de o *pro*ducție a unor figuri în baza unor reguli determinate):

(1) ●	$K1$
(2) ●○	$K2$: (1)
(3) ●○○	$K2$: (2)
(4) ●●○○●	$K3$: (3)
(5) ●●○○●○	$K2$: (4).

Aici, semnificația expresiei „$K2$: (1)“ este următoarea: regula $K2$ este aplicată figurii (1).

Figura ●●○○●○ este astfel deductibilă, respectiv constructibilă în cadrul calculului nostru.

Regulile calculului sînt arbitrare, figurile atomice, la fel ca modul lor de combinare, nu au nici un fel de semnificație. Totul poate fi privit ca un joc, de exemplu

Scanned with OKEN Scanner

ca jocul de șah. Fiecare aplicare a unei reguli asupra unei figuri date corespunde efectuării unui pas pe tabla de șah; înseși regulile de calcul corespund regulilor de joc ale șahului. (De fapt, calculul seamănă mai mult cu rezolvarea unei probleme date de șah, decît a unei partide reale, jucată de doi parteneri.)

În încheiere, vrem să mai facem observația că și în domeniul mai general al matematicii pure vedem realizîndu-se progresul în direcția formalizării printr-o renunțare la ceva „absolut". „Absoluturile" care trebuie abandonate au aici semnificația „absolută" a noțiunilor de bază și valabilitatea „absolută" a axiomelor și a teoremelor. Totul este „relativ", fiind raportat la „convențiile" care determină ipotezele inițiale, liber alese, puse la baza edificiului teoriei deductive.

Chiar dacă am fi tentați să vedem aici un „sacrificiu" adus de dragul progresului în direcția unei formalizări mai avansate, totuși în acest sacrificiu nu apare încă, în nici un fel, vreo limită imanentă a matematicii. Dimpotrivă, se pare că prin această formalizare și „relativizare" din ce în ce mai accentuată, caracterul specific al gîndirii matematice iese abia și mai puternic la iveală.

2

Fidel intenției noastre de a urmări în linii mari traiectoria liniei de dezvoltare a evenimentelor istorice, vrem să acordăm atenție, în cele ce urmează, analizei infinitezimale, pentru că tocmai în acest domeniu pare să fi apărut acea mișcare către o autolimitare a matematicii, pe care nu am reușit s-o găsim în domeniul geometriei. Aritmetica pare, dimpotrivă, să fi fost încă inițial scutită de o asemenea problematică. Introducerea numerelor imaginare, înfăptuită la începutul secolului al XIX-lea de către Gauss și alții într-o formă ireproșabilă, nu a dus niciodată la dificultăți serioase. Abia în zilele noastre au apărut surprinzătoare rezultatele paradoxale din domeniul aritmeticii, datorită lucrărilor lui K. Gödel și Th. Skolem. Asupra acestora vom reveni mai tîrziu.

Scanned with OKEN Scanner

Am văzut la sfîrșitul capitolului al treilea că operarea lipsită de precauție cu seriile infinite poate duce la contradicții. Cercetarea cazurilor analoge a dus pînă la urmă la studiul temeinic al convergenței și divergenței proceselor infinitezimale (adică a șirurilor, a seriilor, a produselor infinite etc.). Într-o strînsă dependență cu aceste cercetări stăteau și eforturile depuse în vederea fundamentării riguroase a întregii analize infinitezimale, și în primul rînd a calculului diferențial și integral. Această operă a fost înfăptuită într-o mare măsură datorită activității lui A. Cauchy. De o importanță fundamentală s-a dovedit a fi introducerea de către el a conceptului de limită, a principiului de convergență ce-i poartă numele, definiția dată de el continuității unei funcții ș.a.

Chintesența acestei atitudini critice în domeniul analizei infinitezimale s-a cristalizat în următoarea regulă generală: a nu avea încredere în procedee formale de calcul care sînt foarte ușor de priceput în baza unor algoritmi introduși mai demult în analiză și a efectua, în fiecare caz în parte, cercetarea convergenței procesului concret dat, și în mod special a stabili valorile variabilei independente, care determină limitele domeniului de convergență a procesului. Aceasta, deoarece la depășirea acestui domeniu de convergență aplicarea operațiilor formale asupra proceselor infinite își pierde sensul.

O anumită perioadă de timp, cerința rigorii părea să fie suficientă. În decursul dezvoltării, într-un stadiu mai avansat al evoluției, au apărut însă dificultăți generate de extinderea noțiunii de funcție asupra unor funcții reale discontinue, funcții care în mod surprinzător aveau un comportament cu totul diferit de acela al funcțiilor algebrice, bine și demult cunoscute, precum și de acela al celor mai simple funcții transcendente, de un tip asemănător cu cele algebrice [6].

S-a descoperit astfel că este necesar un studiu mai aprofundat al structurii însăși a variabilei independente, precum și a domeniului său de variație. Aceasta a dus pe de o parte la teoria numerelor reale (raționale și ira-

---

[6] H. Hankel a dat o strălucită descriere istorică a acestei evoluții; vezi GM, pp. 219—224.

Scanned with OKEN Scanner

ționale), pe de altă parte la teoria mulțimilor de puncte, pentru că singularitățile unor funcții continue formează mulțimi speciale de puncte pe axa numerică, deci mulțimi de numere reale, a căror structură trebuia să fie supusă cercetării.

Toate aceste cercetări, efectuate, de exemplu, de K.Th. Weierstrass, G. Cantor, R. Dedekind și de alții, deschid o nouă epocă în domeniul cercetării fundamentelor matematicii, epocă în care apar exigențe de un tip nou în privința rigorii. Nu este locul să intrăm aici în amănuntele acestor cercetări[7]. Trebuie, totuși, să scoatem în evidență *un* aspect cu caracter decisiv: apariția inevitabilă a infinitului actual sub forma unor mulțimi de puncte, respectiv de numere. Încă în definiția dată de Dedekind numărului irațional prin intermediul așa-numitelor „tăieturi", adică cu ajutorul unei partiții în clase a punctelor axei numerice, apare însăși totalitatea numerelor reale de pe un segment al axei sau de pe întreaga axă numerică. Iar în fundamentarea „clasică" a analizei se face de asemenea foarte frecvent uz de proprietăți ale unor mulțimi actual-infinite. Ne mulțumim să atragem aici atenția doar asupra teoremei fundamentale care enunță că orice mulțime de numere reale superior mărginită are o limită superioară (și numai una). De asemenea, precum am mai amintit, în teoria seriilor trigonometrice (serii Fourier) apar mulțimi de puncte actual-infinite de diverse tipuri. Tocmai acest aspect al teoriei seriilor trigonometrice a oferit una din problemele din care a izvorît mai tîrziu teoria mulțimilor, fundată de G. Cantor.

Metoda calculului cu limite, introdusă inițial de Cauchy și dezvoltată ulterior în amănuntele sale de alții, precum și punerea analizei pe fundamente situate în straturile mai adînci ale teoriei riguroase a numerelor iraționale au dus pînă la urmă, în a doua jumătate a secolului al XIX-lea, la depășirea dificultăților care țineau de utilizarea conceptului de „mărimi infinit mici". Acum însă, cu ocazia noii fundamentări a analizei, a apărut dintr-o dată pe prim plan teoria mulțimilor actual-infinite. Înainte, cu ocazia utilizării noțiunii de infinit mic,

---

[7] Vezi documentele originale în GM, pp. 224—251.

Scanned with OKEN Scanner

nu au apărut încă adevăratele bariere ale gîndirii matematice. Acum au ieșit însă la iveală probleme noi și dificile. Deși teoria mulțimilor a lui G. Cantor a devenit un edificiu măreț de idei, pînă la urmă gîndirea s-a lovit, totuși, de o serie de paradoxuri care nici pînă în ziua de azi nu au putut fi complet înlăturate sau măcar lămurite în structura lor intimă, ajungîndu-se astfel la o tipică „situație-limită“ a gîndirii matematice în general.

Teoria mulțimilor a lui G. Cantor a rupt cu o îndrăzneală nemaiîntîlnită cu aproape întreaga tradiție filozofică și matematică care a stat la baza tratării conceptului de infinit de la Aristotel încoace, pentru că s-a abătut de la fundamentala teză aristotelică, pînă atunci peste tot acceptată, în virtutea căreia infinitul nu poate avea existență decît în potență. La baza acestei realizări a stat descoperirea că axioma fundamentală, formulată încă de Euclid: „Întregul este mai mare ca partea“, nu este valabilă pentru mulțimi actual-infinite. Într-adevăr, considerînd mulțimea tuturor numerelor pare, la fel ca și mulțimea tuturor numerelor întregi ca mulțimi actual-infinite, atunci, în mod evident, prima mulțime este o parte veritabilă a celei din urmă. Pe de altă parte însă, se poate stabili între elementele lor o corespondență biunivocă, în felul următor:

1	2	3	4	5	6	7	8	...	n	...
2	4	6	8	10	12	14	16	...	$2n$	...

Este ușor de acceptat că două mulțimi care sînt între ele în corespondență biunivocă sînt dotate cu aceeași „mărime“ sau, după o expresie a lui Cantor, cu aceeași „putere“. (Acest criteriu este într-adevăr valabil pentru mulțimi finite!) Avem, așadar, un exemplu în care o parte veritabilă are aceeași mărime, respectiv aceeași putere ca și întregul.

Acest exemplu al comparării mulțimii numerelor pare sau chiar a celor pătrate, cu mulțimea numerelor întregi

Scanned with OKEN Scanner

este de foarte mult timp cunoscut; referiri la acest fenomen se găsesc încă la Galilei și Leibniz [8]. Elementul nou introdus de Cantor se află însă în interpretarea dată de el acestui fapt. În timp ce Galilei și Leibniz credeau că violarea principiului: „Întregul este mai mare ca partea" constituie o dovadă a imposibilității de a concepe infinitul în act, cel puțin în privința matematicii, dimpotrivă, Cantor a pus tocmai acest principiu la baza teoriei sale. El a numit mulțimile care pot fi puse în corespondență biunivocă cu mulțimea numerelor întregi — mulțimi „numărabile" și a demonstrat totodată că nu numai mulțimea numerelor raționale, dar și cea a numerelor algebrice este numărabilă, nu însă mulțimea tuturor numerelor reale (raționale și iraționale).

Iată, pe scurt, mersul ideilor urmat în demonstrația lui Cantor:

1. Există numai o singură mulțime de numere raționale adică de fracții a/b, alcătuită în așa fel încît suma numitorului și a numărătorului, $a+b$, să fie egală cu un număr natural dat, n. Fie acum numărate și numerotate succesiv toate acele fracții pentru care această sumă este egală cu unitatea, apoi acelea pentru care această sumă este egală cu 2, apoi acelea pentru care ea este egală cu 3 ș.a.m.d. În fiecare grup, luat separat, ordinea de succesiune este arbitrară. Elementele grupului pot fi ordonate, bunăoară, după mărimea fracției. Astfel ajungem la o înșiruire a tuturor fracțiilor și fiecărei fracții i se va putea asocia acum un număr de ordine.

2. În cazul numerelor algebrice, Cantor pornește de la faptul că ele sînt definite ca soluții ale unor ecuații algebrice, avînd, de exemplu, forma:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Fie aici, prin convenție, $a_0 \neq 0$ și toți coeficienții a_i numere întregi raționale. Cantor introduce acum noțiunea de „înăl-

---

[8] Neoplatonicianul Proclus era preocupat de această problemă încă în epoca antichității tîrzii (la el apare un alt exemplu, de natură geometrică; vezi Proclus, *Euclidem*, p. 158, 1—2; în trad. germană, vezi GM, p. 273.) Un precursor al lui Cantor este B. Bolzano, în lucrarea sa *Paradoxien des Unendlichen*, Praga, 1851; vezi GM, pp. 274—277.

ţime“ asociată polinomului din stînga semnului de egalitate; ea este egală cu suma:

$$h = n + |a_0| + |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_{n-1}| + |a_n|.$$

Evident, numărul polinoamelor care posedă o înălţime determinată este finit şi fiecare polinom are numai un număr finit de zerouri, adică soluţii ale ecuaţiilor corespunzătoare. Să se scrie acum succesiv numerele algebrice ce aparţin pe rînd înălţimilor de valoare 1, 2, 3, ... analog ca mai înainte, în cazul fracţiilor. Obţinem astfel o succesiune care cuprinde toate numerele algebrice şi în care fiecărui număr i se poate asocia un număr de ordine.

În mod analog pot fi caracterizate sau, precum a arătat E. Borel, pot fi numerotate şi alte clase determinate de numere, de exemplu, clase de numere care apar ca sume ale sumelor unor serii infinite sau ale soluţiilor unor ecuaţii diferenţiale [9].

3. În schimb, aşa-numitul „continuu“, adică mulţimea tuturor numerelor reale de pe segmentul unitar nu mai este numărabilă. Aşadar, nu toate mulţimile infinite posedă aceeaşi putere. Cantor a demonstrat această teoremă printr-un procedeu devenit celebru, sub numele de „metoda diagonalei“. În cele ce urmează, vom schiţa pe scurt acest procedeu, deoarece el s-a dovedit a fi o metodă de argumentaţie deosebit de importantă, aplicabilă şi altor probleme.

Demonstraţia cantoriană procedează pe o cale indirectă şi are un caracter oarecum dialectic. Să presupunem că toate fracţiile zecimale infinite (sau, dacă dorim, toate fracţiile binare) situate între 0 şi 1 sînt scrise în faţa noastră într-o succesiune numărabilă. (Eventualele fracţii zecimale finite pot fi transformate în fracţii nesfîrşite, înlocuind ultima cifră, de exemplu k, cu k—1, şi înscriind apoi pe locurile următoare mereu cifra 9; astfel, putem scrie, de exemplu, în loc de 0,5, fracţia 0,49999...)

---

[9] Cu privire la cele două demonstraţii ale lui G. Cantor din 1874, vezi GM, p. 278 şi urm. Amănunte cu privire la ideile lui Borel, vezi în E. Borel, *Leçons sur la théorie de la croissance*, Paris, 1910, p. 118 şi urm.; vezi, de asemenea, O. Becker, *Mathematische Existenz*, p. 161.

Scanned with OKEN Scanner

Fie acum succesiunea tuturor fracțiilor zecimale între 0 și 1, reprezentate prin următoarea schemă:

$$0,a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \ldots$$
$$0,a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \ldots$$
$$0,a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

(Semnele a_{ik} sînt deci cifrele: 0, 1, 2, ..., 9.)

Să se formeze acum „diagonala" acestei scheme: $a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ \ldots$, și să se înlocuiască fiecare cifră a acesteia cu cîte o cifră diferită de ea: $b_{11}\ b_{22}\ b_{33}\ \ldots$. Vom avea deci: $b_{11} \neq a_{11}$, $b_{22} \neq a_{22}$, $b_{33} \neq a_{33}\ \ldots$. Acum, este cert că fracția zecimală infinită $0,b_{11}\ b_{22}\ b_{33}\ \ldots$ este diferită de oricare din fracțiile zecimale conținute în schema de mai sus. Într-adevăr, noua fracție diferă de prima din schemă, cel puțin prin prima cifră (după fracția zecimală), de a doua — cel puțin prin a doua cifră, de a treia — cel puțin prin a treia cifră ș.a.m.d. Or, cu aceasta este demonstrată teorema că succesiunea de fracții zecimale date mai sus nu poate conține toate fracțiile zecimale, adică numerele reale ale segmentului unitar.

Această remarcabilă demonstrație are, precum am mai spus, un caracter indirect și „dialectic". Cu toate aparențele contrarii, ea nu are însă un caracter constructiv. Cu ajutorul procedeului diagonal al lui Cantor nu putem produce în mod „efectiv" o mulțime nenumărabilă de numere reale în forma unor fracții zecimale. Evident, este foarte ușor să introducem ulterior noua fracție obținută: $0,b_{11}\ b_{22}\ b_{33}\ \ldots$, în vechea succesiune de fracții zecimale; ea poate fi pusă, de exemplu, chiar la începutul șirului. Repetarea procedeului precedent al metodei diagonale nu duce însă în mod evident la nimic, deoarece noile numere obținute pe această cale pot fi din nou și din nou inserate în succesiunea numărabilă a numerelor reale date în prealabil. Argumentația are în întregime un caracter pur negativ și are, fără îndoială, ceva paradoxal în sine, deși nu conține nici o contradicție.

Procedeul diagonal demonstrează, după Cantor, că există o mulțime mai mare (mai precis: o mulțime de putere superioară) ca mulțimea numerelor naturale, și

Scanned with OKEN Scanner

anume mulțimea numerelor reale (așa-numitul „continuu"). Această din urmă mulțime poate fi concepută și ca mulțimea tuturor submulțimilor mulțimii numerelor naturale[10].

Printr-un raționament analog se poate arăta, de asemenea, că puterea mulțimii tuturor funcțiilor reale (continue și discontinue), chiar și numai a acelora care sînt definite numai pe segmentul unitar, este superioară puterii continuului[11]. Să ne imaginăm în acest scop funcțiile $f(x)$ asociate numerelor reale. Fie acum funcția asociată unui număr particular z, notată cu semnul $f_z(x)$. Să se construiască acum „funcția diagonală" $f_z(z)$, precum și o altă funcție, $g(z)$, care diferă în mod cert pentru toate valorile argumentului său de funcția diagonală; de exemplu, fie: $g(z) = f_z(z) + 1$. Funcția $g(z)$ este atunci în mod cert diferită de oricare din funcțiile introduse mai sus și asociate fiecare unui număr real. Este, așadar, imposibilă stabilirea unei corespondențe biunivoce între mulțimea funcțiilor $f(x)$ și mulțimea numerelor reale.

Același procedeu poate fi aplicat acum din nou pentru a demonstra că puterea mulțimii tuturor funcțiilor de funcții este superioară puterii mulțimii tuturor funcțiilor reale. Din moment ce în exemplul de față am luat drept argument însești funcțiile reale, în pasul următor putem alege drept argumente ale unei clase superioare de funcții însești funcțiile de funcții din exemplul precedent. Vom obține astfel funcții de ordinul trei („funcții de funcții de funcții"). Acum, cu același procedeu diagonal ne putem ridica la mulțimi de puteri și mai mari. Acest procedeu poate fi, în mod evident, continuat fără limită. Ajungem astfel la o succesiune fără sfîrșit de mulțimi de puteri din ce în ce mai ridicate. Nu există,

---

[10] Pentru că toate numerele reale pot fi scrise în forma unor fracții binare, care se scriu numai cu ajutorul cifrelor 0 și 1, să facem să corespundă fiecăreia dintre aceste fracții cîte o submulțime a mulțimii numerelor naturale, submulțime conținînd numerele de ordine ale locurilor pe care în fracția noastră binară figurează cifra 1; astfel, de exemplu, fracției binare 0,101010... îi corespunde submulțimea numerelor impare: (1, 3, 5, ...).

[11] Această mulțime este echivalentă cu mulțimea tuturor mulțimilor de numere reale.

Scanned with OKEN Scanner

aşadar, nici o mulţime care să aibă o putere maximală. Această constatare ne duce însă la un paradox, deoarece mulţimea tuturor mulţimilor sau mulţimea tuturor lucrurilor imaginabile trebuie totuşi să aibă puterea maximală, fiind ea însăşi obiectul maximal care le conţine pe toate celelalte. Considerînd această mulţime ca domeniu al variabilei independente, o funcţie definită pe acest domeniu sau, ceea ce este acelaşi lucru, mulţimea tuturor submulţimilor sale va trebui să posede, în baza consideraţiilor precedente, o putere încă şi mai mare ca puterea maximală!

Apare aici un fenomen remarcabil. Şi anume, că natura potenţială a infinitului, care părea să fi fost complet înlăturată prin teoria mulţimilor a lui Cantor, reapare oarecum pe un plan superior. Succesiunea fără sfîrşit a mulţimilor de puteri mereu crescînde constituie, ca întreg, o infinitate în potenţă, deşi elementele ce o alcătuiesc sînt toate, luate separat, mulţimi actual - infinite. În esenţă, ea dispune de aceeaşi structură ca şi succesiunea numerelor naturale în concepţia precantoriană.

Rezultate analoge pot fi obţinute şi în domeniul mulţimilor bine ordonate (acestea sînt mulţimile liniar ordonate, în aşa fel încît orice submulţime a lor posedă un prim element), şi anume cu privire la tipurile lor de ordine la aşa-numitele „numere ordinale transfinite“. Noţiunea de „cel mai mare“ sau, exprimat mai plastic, noţiunea de „ultimul“ ordinal transfinit duce şi în acest domeniu la o contradicţie, la aşa-numita „antinomie a lui Burali-Forti“. Pentru că dacă notăm cu W ultimul ordinal transfinit, atunci putem forma, de asemenea, $W+1$, un ordinal transfinit care ar fi deci succesorul „ultimului“ ordinal.

Pentru a înlătura aceste paradoxuri, trebuie să ne limităm numai la „mulţimi“ care sînt oarecum situate sub o mulţime determinată şi fixă (desigur, în cadrul consideraţiilor respective), mulţime care va fi atunci pusă la baza consideraţiilor noastre ca o „mulţime fundamentală“. Trebuie, aşadar, să introducem o limitare a „mărimii“ mulţimilor considerate („*limitation of size*“ — după o expresie a lui B. Russell).

Scanned with OKEN Scanner

Dar, chiar dacă datorită luării unor măsuri de acest fel paradoxurile precedente pot fi într-adevăr înlăturate, nu dispunem, totuși, de nici o garanție că nu ar putea să apară alte paradoxuri noi, astăzi necunoscute, dar numai pentru că pînă acum nu au fost remarcate. Sîntem puși aici în fața unei probleme veritabile și deosebit de serioase: cum s-ar putea demonstra lipsa de contradicții a teoriei mulțimilor și, în general, a matematicii, admițînd, eventual, efectuarea unor modificări adecvate ale teoriilor „clasice" tradiționale?

Această problemă are un caracter deosebit de stringent, luînd seama de faptul că, cu ocazia încercărilor de a-și crea un fundament solid, teoria mulțimilor a condus și la paradoxuri cu caracter pur *logic*. Pentru că, este lipsit de orice îndoială faptul că în privința principiilor sale fundamentale, această teorie este o disciplină înrudită cu logica. Noțiunea de mulțime este în mod evident foarte apropiată de ideea de sferă sau extensiunea unei noțiuni date. O mulțime infinită nu poate fi în mod efectiv descrisă prin indicarea separată a fiecărui element în parte. Așa ceva este în mod evident posibil numai în cazul mulțimilor finite. Rezultă că o mulțime infinită poate fi descrisă numai dacă se dă o proprietate, un concept, o lege care o caracterizează și care este satisfăcută de toate elementele sale. Însăși mulțimea poate fi definită, în acest caz, ca totalitatea tuturor acelor obiecte care posedă proprietatea indicată, sau ca extensiunea conceptului corespunzător.

Este însă remarcabil faptul că această definiție, în aparență atît de clară și evidentă, duce la o antinomie: antinomia proprietății caracteristice a tuturor acelor proprietăți care nu se referă la însăși proprietatea în chestiune, sau — pe plan extensional — la antinomia mulțimii tuturor mulțimilor care nu se conține ca element. Acest ultim paradox este de fapt celebra antinomie a lui Russell, căreia autorul însuși i-a dat următoarea formulare:

„Fie w clasa acelor clase care nu se conțin ca element. Oricare ar fi atunci o clasă x, propoziția «x este w» este echivalentă cu propoziția «x nu este x». Dacă i se dă,

Scanned with OKEN Scanner

așadar, lui x valoarea w, atunci propoziția «w este w» este echivalentă cu propoziția «w nu este w»".

Este demn de remarcat că în considerațiile precedente, mulțimile care nu se conțin pe ele însele sînt mulțimile normale[12]. Mulțimea tuturor numerelor naturale nu este ea însăși un număr; o mulțime oarecare de puncte nu este ea însăși un punct ș.a.m.d. Există însă și mulțimi care par să se comporte altfel. Astfel, de exemplu, mulțimea tuturor obiectelor non-verzi este ea însăși un obiect non-verde. Și, la fel, mulțimea tuturor mulțimilor pare ea însăși a fi, de asemenea, o mulțime. Cu toate acestea, mulțimea paradoxală w, definită de Russell, este tocmai mulțimea tuturor mulțimilor normale; după toate aparențele, este deci un concept împotriva căruia nu se poate obiecta nimic. Și, cu toate acestea, tocmai acest concept duce la paradox, și anume în momentul în care se pune întrebarea dacă el însuși este normal sau nu. Deoarece dacă el reprezintă o mulțime normală, atunci aparține ca element lui însuși, deci este nenormal, iar dacă este nenormal, atunci nu se conține ca element, deci este normal.

În mod analog, putem denumi și proprietățile ireflexive — proprietăți care nu se referă la ele însele — ca normale. Astfel, „normal" va fi sinonim cu „ireflexiv". Dacă se pune acum întrebarea: este oare proprietatea de „normal" sau de „ireflexivitate" ea însăși normală (deci ireflexivă)? Ajungem la aceeași contradicție ca și în situația celor precedente.

S-a demonstrat că antinomiile de acest tip nu provin dintr-o imperfecțiune a limbajului uzual, natural. Tocmai de aceea ele mai sînt numite și antinomii „logice" (cîteodată chiar „sintactice"), în opoziție cu așa-numitele antinomii „semantice" (la care intervin concepte lingvistice, ca sens, notație, sau chiar concepte ca adevăr, valabilitate, demonstrabilitate etc.). Tocmai de aceea aceste antinomii pot fi exprimate fără nici o dificultate într-un limbaj logic formalizat. Datorită importanței principiale

---

[12] De exemplu, mulțimea tuturor obiectelor verzi nu este ea însăși un obiect verde. Există, desigur, și excepții: astfel, mulțimea tuturor mulțimilor este ea însăși o mulțime.

Scanned with OKEN Scanner

pe care o are, vom da în cele ce urmează o scurtă schiță a unei asemenea formalizări.

La baza considerațiilor noastre stă așa-numitul „principiu al comprehensiunii", care poate fi exprimat pe cale simbolică în felul următor[13]:

(1) $$(Ez)\,(x)\,(x \in z = H(x))$$

„Există un z, în așa fel încît pentru orice x avem: x îi aparține mulțimii z, atunci și numai atunci dacă satisface condiția H".

Dacă luăm acum condiția H în mod special identică cu $\overline{x \in x}$, adică: „x nu aparține ca element aceluiași x", atunci ajungem la o contradicție:

(2) $$(Ez)\,(x)\,(x \in z = \overline{x \in z})$$

Însă, din moment ce semnul (x) are semnificația valabilității generale, adică „pentru orice x", putem pune litera z în locul lui x și obținem astfel contradicția [14]:

(3) $$z \in z = \overline{z \in z}$$

Pentru eliminarea acestei contradicții, trebuie să introducem următoarele idei suplimentare[15]:

1. Se poate propune o modificare a principiului comprehensiunii, și anume din nou în mai multe feluri:

a. Se poate cere, de exemplu, ca condiția H, care nu a fost inițial supusă nici unei restricții (vezi formula (1)) să fie „stratificată". O asemenea stratificare se obține adăugînd condiției $H(x)$ anumite condiții suplimentare, legate de cea dintîi prin particula „și" (*et*). Așa, de exemplu, W. V. Quine (asociindu-se unei idei emise de J. v. Neumann) adoptă următoarea condiție suplimentară: $(Eu)\,(x \in u)$. Aceasta înseamnă că se cere să existe o mulțime u,

---

[13] Explicarea simbolurilor utilizate: (Ez): „există un z"; (x): „pentru orice x"; $x \in z$: „x este un element al mulțimii z"; $H(x)$: „x satisface condiția H".

[14] Vezi H. Hermes și H. Scholz, *Mathematische Logik*, în *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, ed. a 2-a, vol. I, partea I, fasc. 1, partea 1, Leipzig, 1952, nr. 12,3, p. 59.

[15] Acestea sînt tratate amănunțit de H. Hermes și H. Scholz, *op. cit.*, în *loc. cit.*, partea 4, p. 60.

Scanned with OKEN Scanner

care îl conține pe x ca element. În locul formulei (3), vom avea atunci:

$$(3') \qquad z \in z = (Eu)(x \in u)\ et\ \overline{z \in z}$$

De aici rezultă însă că $(Eu)(x \in u)$ este fals[16]; cu alte cuvinte, nu există nici o mulțime u care să-l conțină pe x ca element; x nu poate fi element al nici unei mulțimi. În consecință, întrebarea dacă x se conține pe sine sau nu este complet lipsită de sens.

b. După E. Zermelo, expresia $H(x)$ poate fi înlocuită cu o serie de principii generatoare de mulțimi, principii alese în așa fel încît contradicții de tipul acelora întîlnite pînă acum nu pot apărea și care sînt, totuși, încă suficient de puternice pentru ca, cu ajutorul lor, să poată fi construit edificiul teoriei „clasice" a mulțimilor. Zermelo nu operează cu mulțimi arbitrar de mari, considerate drept „colecții" ale unor obiecte oarecare. Unica operație admisă care poate fi aplicată unei mulțimi date, pentru a obține din ea o mulțime superioară ca putere, este operația de alcătuire a mulțimii tuturor submulțimilor. Aceasta însă nu ne duce încă la mulțimile cele mai cuprinzătoare[17].

2. A doua metodă care ne duce la evitarea antinomiei constă în excluderea, în general, a expresiilor de forma $x \in x$ și $\overline{x \in x}$.

Procedeul lui Quine constă, de exemplu, în a cere ca mulțimile să fie prevăzute cu indici în așa fel încît elementelor individuale, claselor de indivizi, claselor de clase de indivizi ș.a.m.d. să li se asocieze mereu cîte un indice

---

[16] O echivalență de forma $p \equiv (q\ et\ \overline{p})$ este numai atunci valabilă, dacă expresiile de pe ambele părți ale semnului de echivalență sînt simultan adevărate sau simultan false. Dar este imposibil ca ambele expresii să fie simultan adevărate; pentru că dacă p este adevărat, atunci $\overline{p}$ este fals, deci conjuncția din dreapta semnului este falsă. Dacă însă p este fals, atunci $\overline{p}$ este adevărat; însă împreună cu aceasta întreaga parte din dreapta semnului este falsă, așa încît echivalența este adevărată dacă și al doilea termen al conjuncției, q, este adevărat. Dar aceasta înseamnă că p și q trebuie să fie simultan false.

[17] Vezi E. Zermelo, *Über Grenzzahlen und Mengenbereiche*, în „Fundamenta Mathematicae", XVI, 1930, pp. 29—47.

Scanned with OKEN Scanner

mai mult. În aceste condiții, expresii de forma $x \in y$ sînt acceptate atunci și numai atunci dacă indicele lui y este imediat superior indicelui lui x. Antinomiile pot fi evitate și pe această cale, desigur în măsura în care intră în considerație paradoxurile „logice" cunoscute astăzi.

Ce semnificație au acum toate aceste considerații din punctul de vedere al problemei care ne preocupă aici, deci al întrebării privind limitele gîndirii matematice?

Este fără îndoială surprinzător, dacă nu chiar consternant, faptul că în general este posibil să se ajungă la asemenea contradicții cu ajutorul unor argumente impecabil și ireproșabil construite. Și cine recitește cuvintele, în ciuda tonului lor calm, aproape disperate ale lui Frege, cu care a încheiat marea sa lucrare fundamentală, *Grundgesetze der Arithmetik*, cuvinte cu care el a prezentat în public paradoxul lui Russell în 1902 (aceasta a fost prima prezentare publică a paradoxului comunicat de Russell lui Frege într-o scrisoare), acela va retrăi și astăzi încă același sentiment cutremurător pe care l-a provocat la vremea sa această fatidică descoperire a unor „singularități" nebănuite ale funcțiilor logice. Istoricul matematicii își amintește cu această ocazie de descoperirea rapoartelor irațională, pe figurile geometrice obișnuite, de către matematicienii școlii pitagoreice din secolul al V-lea î.e.n., descoperire care a deschis o „criză a fundamentelor" de o factură analogă.

Dar matematicienii și filozofii, atît cei antici cît și cei moderni, nu s-au predat și nu au renunțat la găsirea unei ieșiri din această situație critică. În antichitate a apărut, precum am arătat mai sus, teoria rapoartelor incomensurabile, elaborată de Theaitetos și Eudoxiu, iar în epoca noastră a fost dezvoltată cercetarea exactă a fundamentelor matematicii, care se străduiește să demonstreze consistența unei părți cît se poate de mari a matematicii tradiționale. Ce putem spune acum: oare gîndirea matematică a ajuns prin aceasta într-o criză din care nu mai poate ieși, sau a și ieșit din ea? Poate că este prea mult să se vorbească de o „criză", dar nu a devenit oare vizibilă măcar o „limită" a gîndirii matematice?

Este de netăgăduit că în teoria mulțimilor nu se pot admite operații „naive" de genul acelora despre care s-a

Scanned with OKEN Scanner

crezut pînă acum că sînt îndreptățite. Nu este voie să se creeze, de exemplu, mulțimi arbitrar de mari, și anume mulțimea „atotcuprinzătoare" este interzisă. Trebuie să ne păzim, de asemenea, de concepte reflexive, nepredicative. Russell a introdus în acest scop celebrul său „principiu al cercului vicios": orice entitate, determinată într-un fel de *toate* elementele unei totalități, nu poate aparține ca element aceleiași totalități. Dar o asemenea limitare a posibilității de alcătuire a mulțimilor (sau, privit din punct de vedere logic, a creării conceptelor) este oare o limitare a gîndirii matematice ca atare? Oare autocorectarea gîndirii nu aparține și ea însăși gîndirii? Nu este oare vorba aici mai curînd de o rafinare a gîndirii logico-matematice prin intermediul activității meditative, decît de un eșec al acesteia?

Antinomiile logico-mulțimiste obligă gîndirea la o reflecție asupra propriilor sale conținuturi, la o autoverificare; dar acesta nu constituie de loc un moment străin gîndirii și cu atît mai puțin ceva ce i s-ar opune cu ostilitate, ci această întreagă evoluție este conținută din capul locului în natura gîndirii, ca o posibilitate. Privite dintr-un punct de vedere general-filozofic, evenimentele ce au avut loc nu pot fi considerate în nici un caz catastrofale: nu se poate vorbi sub nici o formă de vreo prăbușire a gîndirii. Se ridică, totuși, întrebarea: antidoturile descrise mai sus sînt oare în stare să înlăture pericolul apariției unor alte antinomii? Nu este oare posibil ca într-o bună zi, precum am amintit, să fie descoperite paradoxuri pînă acum nebănuite, împotriva cărora principiul cercului vicios să fie total ineficient? Și, mai departe, se mai pune din nou întrebarea: aplicarea riguroasă și consecventă a principiului cercului vicios nu prejudiciază oare forței de pătrundere a raționamentului matematic? Nu au jucat oare tocmai procedeele de raționament, astăzi „interzise", un rol important, poate chiar indispensabil, în construirea uriașului edificiu al matematicii moderne?

Iată, aceste probleme de un caracter mai mult „tehnic" s-au dovedit a fi mai importante decît considerațiile de un caracter „general-filozofic". În ultimele decenii, toate forțele au fost utilizate în lupta pentru rezolvarea aces-

Scanned with OKEN Scanner

tora. Un rol conducător a avut pe acest tărîm David Hilbert. El însuşi a reuşit să demonstreze consistenţa aritmeticii elementare (calculul numeric), a geometriei elementare, precum şi a aşa-numitei „aritmetici recursive" a lui Th. Skolem[18]. G. Gentzen a demonstrat primul, la rîndul său, într-un mod exhaustiv consistenţa teoriei numerelor[19], iar P. Lorenzen consistenţa analizei, într-o formă care diferă numai foarte puţin de aspectul ei „clasic"[20].

Nu este locul să intrăm aici în prezentarea amănunţită a procedeelor utilizate în aceste demonstraţii de consistenţă. Ne mulţumim să atragem atenţia doar asupra faptului că tocmai în scopul efectuării unor asemenea demonstraţii a inventat Hilbert modalitatea de a trata problemele cu procedee aşa-numite „metamatematice". Dacă o demonstraţie sau, în general, o întreagă teorie matematică devine formalizată cu ajutorul calculului logic şi îmbracă astfel o formă pur simbolică, lipsită de orice imixtiune a limbii vorbite, atunci succesiunea de simboluri, precum şi modalităţile de trecere de la un şir de simboluri reprezentînd teoreme matematice, la un alt şir de semne, proiectează în faţa noastră o structură şi un proces care, la rîndul lor, pot fi supuse unui tratament matematic de sine stătător. Această cercetare matematică a aparatului de semne este numită de Hilbert „metamatematică". În aceste consideraţii se face complet abstracţie de faptul dacă semnele simbolice au sau nu o „semnificaţie", ele fiind concepute numai ca „figuri" golite de semnificaţie, analog cu modul în care sînt utilizate asemenea semne într-un calcul „de joc" (ca, bunăoară, calculul lui Lorenzen,

---

[18] Vezi prezentarea tuturor acestor rezultate în D. Hilbert-P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, I, Berlin, 1934; II, Berlin, 1939.

[19] *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*, în „Mathematische Annalen", 112, 1936, pp. 493—565.

[20] *Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis*, în „Mathematische Zeitschrift", 54, 1951, p. 1 şi urm. Vezi şi *Konstruktive Begründung der Mathematik*, ibidem, 53, 1950, p. 162 şi urm. O prezentare cuprinzătoare a acelei matematici care poate fi fundamentată în mod consistent se găseşte în cartea aceluiaşi autor, *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1955.

Scanned with OKEN Scanner

pe care l-am prezentat mai sus și asupra căruia vom reveni) sau în jocul de șah. Ideea de bază a demonstrațiilor de consistență constă acum în aceea că însuși enunțul contradictoriu este reprezentat pe cale simbolică, de exemplu prin ecuația absurdă „1 = 2“, și se arată apoi că această figură simbolică nu poate fi reprezentată în cadrul calculului cu ajutorul celor trei figuri elementare („atomii“): „1“, „ = “, „2“, adică enunțul contradictoriu nu poate fi efectiv produs în cadrul jocului cu ajutorul regulilor de calcul care stau la baza lui.

Să ne gîndim, prin analogie, la faptul că și în jocul de șah există anumite situații finale în care matul este imposibil, adică poziția de mat nu poate fi efectiv produsă în nici un fel. Așa este, bunăoară, situația finală în care cele două regine se află pe tablă față-n față.

Procedeul despre care vorbim poate fi ilustrat pe o cale simplă, pe exemplul calculului lui Lorenzen, introdus de noi mai sus. În acest calcul de joc, absolut gratuit și fără nici un fel de „semnificație“, există numai doi atomi, ● și ○, o unică figură fundamentală ●, și două reguli fundamentale:

$$x \rightarrow x\,\bigcirc \quad \text{și} \quad x \rightarrow \bullet\, x\, \bullet .$$

Ne putem convinge acum foarte ușor de faptul că în acest calcul o figură poate fi efectiv produsă (dedusă) atunci și numai atunci dacă atomii negri ● se găsesc în el într-un număr impar și atomii albi ○ apar numai la dreapta față de atomul negru mijlocitor. Figurile care nu satisfac aceste două condiții nu pot fi produse în calculul nostru, în special, de exemplu, figura ●○●, deoarece ea conține un număr par, și anume doi atomi negri. Dacă, acum, calculul ar putea fi interpretat în așa fel (ceea ce nu este cazul) încît figura ●○● să simbolizeze o teză inconsistentă (ca, de exemplu, „1 = 2“), atunci ar fi în mod implicit demonstrată teza că în calculul nostru contradicția nu poate fi dedusă și prin aceasta consistența lui ar fi de asemenea demonstrată [21].

---

[21] Vezi P. Lorenzen, *op. cit.*, p. 95. Cu privire la prima încercare a lui Hilbert îndreptată spre demonstrarea consistenței aritmeticii (în conferința sa *Über die Grundlagen der Logik und*

Scanned with OKEN Scanner

Este imposibil să redăm aici în întregime o demonstrație de consistență, în toate amănuntele sale. Trebuie să ne mulțumim în acest loc cu această prezentare schițată.

Atîta timp cît asemenea demonstrații de consistență sînt suficiente, trebuie să considerăm ca demonstrată lipsa absolută de contradicție a acelor teorii matematice care se bazează pe ele și, prin aceasta, teoriile respective pot fi considerate ca fiind asigurate în mod absolut. Firește, s-a dovedit a fi cu totul iluzorie speranța lui Hilbert de a putea efectua demonstrații de consistență mai cuprinzătoare cu ajutorul unor asemenea metode metamatematice finite. Chiar dacă nu imediat în construirea calculului elementar, a „aritmeticii recursive" sau în cazul geometriei elementare, dar o dată cu intenția de a construi teoria completă a numerelor și, desigur, cu fundamentarea analizei și a teoriei mulțimilor au apărut dificultăți de ordin principial.

Dacă nu s-ar fi întîmplat așa și dacă procedeele metamatematice finitiste s-ar fi dovedit a fi suficient de pătrunzătoare, atunci, desigur, nu s-ar mai fi putut vorbi nici de o limită impusă gîndirii matematice de către antinomiile logico-mulțimiste. Dar situația de fapt nu este chiar atît de simplă, precum vom vedea în cele ce urmează.

4

O continuare liniară a considerațiilor noastre de pînă acum ar cere să intrăm acum mai adînc în relatarea dificultăților semnalate, care s-au opus generalizării demonstrațiilor genuine de consistență date de Hilbert. Dar am lăsat puțin în urmă evenimentele istorice care au avut loc între timp. În primul deceniu al secolului al XX-lea intră în joc încă o concepție, despre care pînă acum nu am vorbit de loc, așa-numitul „intuiționism" sau, mai

---

Arithmetik, ținută la Congresul de matematică din Heidelberg, în anul 1904), vezi GM, pp. 360—370. Alte date cu privire la metamatematica și teoria demonstrației, ale lui Hilbert, vezi în GM, pp. 370—383; cu privire la Gentzen, în GM, pp. 387—392; cu privire la Lorenzen, în GM, pp. 392—401.

Scanned with OKEN Scanner

precis, „neointuiționismul“ lui L. E. J. Brouwer (începînd cu anul 1907)[22]. De pe aceste baze pornește acum un nou atac împotriva matematicii tradiționale, despre care în secolul al XIX-lea s-a pretins că ar fi fost fundamentată într-un mod absolut riguros. Și tocmai în apărarea acesteia și-a dezvoltat în mod special Hilbert teoria demonstrației.

Ideea esențială de la care pornește Brouwer este îndoiala față de principiul logic al terțului exclus, aplicat unor mulțimi infinite. Dacă știm despre o mulțime M că nu toate elementele sale posedă o anumită proprietate A, atunci de aici conchidem, de obicei, că există cel puțin *un* element în M care nu posedă proprietatea A. Dacă mulțimea M este arbitrar de mare, dar finită, corectitudinea concluziei precedente poate fi pusă în afara oricărei îndoieli. După părerea lui Brouwer, lucrurile stau însă cu totul altfel cînd mulțimea M conține o infinitate de elemente, de exemplu dacă avem de-a face cu mulțimea numerelor pare mai mari ca 2 (deci 4, 6, 8,...).

Să luăm ca exemplu tocmai această mulțime și să alegem drept proprietate A faptul că, după aparențe, orice număr par mai mare ca 2 poate fi reprezentat ca sumă a două numere prime diferite (nu neapărat într-un singur fel).

Într-adevăr, proprietatea enunțată se verifică ușor pentru primele numere pare:

$$4 = 1 + 3,\ 6 = 1 + 5,\ 8 = 3 + 5,\ 10 = 3 + 7,$$
$$12 = 5 + 7,\ 14 = 3 + 11,\ \ldots$$

Matematicianul Christian Goldbach (1690—1764) a emis conjectura că proprietatea A este valabilă pentru orice număr par, dar nici el, și de atunci nimeni nu a reușit (pînă acum) să demonstreze nici însăși conjectura, nici contrariul ei. (Prin simple verificări conjectura nu poate fi demonstrată, deoarece șirul numerelor pare este fără sfîrșit.) Conform principiului logic „*tertium non datur*“, amintit adineauri, am avea dreptul să stabilim măcar următoarea disjuncție: „sau toate numerele pare mai

---

[22] Cu privire la intuiționism, vezi culegerea de documente GM, pp. 327—351 (L. Kronecker, É. Borel, L.E.J. Brouwer, A. Kolmogorov, H. Weyl).

Scanned with OKEN Scanner

mari ca 2 pot fi într-adevăr reprezentate ca sume a două numere prime diferite, sau există cel puţin *un* caz în care regula nu mai este valabilă".

Brouwer combate ideea valabilităţii unui asemenea raţionament, deoarece nu este posibil să parcurgem efectiv toate elementele mulţimii (4, 6, 8, ...) pentru a putea da astfel de elementul singular care nu se supune regulii *A*. De asemenea, nu este cunoscut nici un procedeu constructiv care ne-ar permite în mod general determinarea unui asemenea element excepţional. În consecinţă, nu se mai poate susţine că cele două enunţuri: „nu toate elementele lui *M* posedă proprietatea *A*", respectiv: „există cel puţin *un* element care nu posedă proprietatea *A*", ar fi echivalente între ele.

Pornind de la aceste idei de bază, Brouwer şi şcoala sa au procedat la o reconstrucţie cuprinzătoare a matematicii, în cadrul căreia utilizarea principiului „*tertium non datur*" este înlăturată, toate demonstraţiile fiind duse într-o manieră pur constructivă. (Depăşind această tendinţă, G. F. C. Griss a început recent, respectiv din 1944, să construiască un sistem matematic care renunţă complet chiar şi la utilizarea negaţiei. Dar nici această orientare nu a reuşit să învingă încă toate dificultăţile pe care le-a provocat.) Matematica intuiţionistă se dovedeşte a fi, în practică, mult mai complicată decît cea tradiţională. Chiar dacă operaţia de „salvare" a unor părţi însemnate ale vechiului edificiu ar reuşi, şi, desigur, cele necesare pentru fizica teoretică ar trebui să fie printre acestea, totuşi ar mai trebui să contăm pe pierderi dureroase; dar, trecînd peste asta, ar trebui să înfruntăm demonstraţii mult mai dificile. De asemenea, ar fi necesar ca noţiuni atît de obişnuite, cum este cea de convergenţă şi divergenţă a şirurilor infinite ş.a., să fie subdivizate în mai multe subspecii.

Nu este cazul să urmărim aici mai departe aceste idei[23]. Se pune din nou întrebarea: stăm oare aici în faţa unei

[23] Vezi A. Heyting, *Intuitionism. An Introduction*, Amsterdam, 1956. Lucrarea conţine şi o bibliografie cuprinzătoare. Însuşi Heyting a fost primul care a dezvoltat un calcul logic intuiţionist; acesta nu joacă însă în matematica intuiţionistă rolul fundamental pe care-l are calculul logic în teoria demonstraţiei a lui Hilbert.

Scanned with OKEN Scanner

limite principiale a gîndirii matematice, care nu poate fi depăşită? Oare vechea matematică „clasică", în măsura în care refuză să se supună unei reconstrucţii intuiţioniste, şi-ar pierde acum orice valabilitate, orice semnificaţie?

Cu ajutorul teoriei metamatematice a demonstraţiei, elaborată de el, Hilbert a venit să se opună „încercării de lovitură de stat" a intuiţioniştilor; el a afirmat că în cadrul şi cu ajutorul teoriei demonstraţiei, fundată de el, se va putea lucra cu principiul „*tertium non datur*" şi în cazul mulţimilor infinite, fără a se ajunge la contradicţii. Desigur, prin aceasta matematica clasică (în măsura consistenţei sale) şi-ar găsi o fundamentare.

Ideea fundamentală a metodei aplicate de Hilbert constă în aceea că în locul unor enunţuri existenţiale de tipul: „există un element al lui M care nu posedă proprietatea A", el se mulţumeşte numai cu imposibilitatea de a combate acest enunţ, deci : „nu se poate demonstra că nu există un asemenea element în M, care să posede...". Enunţul imposibilităţii de a combate enunţul apare atunci el însuşi ca echivalent cu negarea enunţului universal: „nu toate elementele lui M posedă proprietatea A". (Noi am redat aici mersul ideilor pe o cale oarecum aproximativă. Redarea lor exactă este mult mai complicată[24].)

Pe această cale reuşeşte într-adevăr construirea unui calcul consistent „fictiv", care corespunde în întregime calculului logic clasic. Nu se poate deci spune despre critica intuiţionistă a logicii clasice că ea ar fi avut efecte distructive asupra acesteia. În orice caz, trebuie să ţinem cont de faptul că trebuie făcută o distincţie între logica „efectivă" şi „fictivă" şi că rezultatele obţinute cu ajutorul acesteia din urmă nu au aceeaşi semnificaţie „reală" ca şi acelea obţinute cu ajutorul celei dintîi. Trebuie să avem de asemenea în vedere următoarea împrejurare, asupra căreia a atras atenţia încă Hilbert, la vremea lui: dacă a fost obţinut un rezultat numeric determinat cu ajutorul unui calcul consistent, fie chiar cu unul fictiv (de exemplu, într-o teorie de fizică sau de astronomie), atunci

---

[24] Vezi, de exemplu, expunerea lui P. Lorenzen, *op. cit.*, pp. 100, 119 şi urm.

Scanned with OKEN Scanner

acest rezultat are o valabilitate „reală", deoarece lui nu i se poate opune altul de o valoare numerică diferită și privind aceeași problemă, fără a ajunge astfel la o contradicție în interiorul sistemului. Or, conform ipotezelor admise, se poate arăta că apariția unei asemenea situații este exclusă. Astfel, conform opiniei lui Hilbert, considerații matematice cu caracter fictiv sînt în fizica teoretică și alte științe tot atît de bine utilizabile ca și cele efective, desigur cu condiția consistenței, pînă cînd acestea duc la rezultate numerice determinate.

Putem consemna, așadar, ca un rezultat cert al considerațiilor precedente faptul că din concepția intuiționistă nu rezultă o limitare, ci, dimpotrivă, o rafinare a gîndirii matematice.

5

După acest „intermezzo" (care nu este, totuși, un adevărat intermezzo, deoarece va interveni mereu în decursul desfășurării ulterioare a cercetărilor fundamentelor matematicii), ajungem la cea mai serioasă dificultate cu care a avut de-a face gîndirea matematică în decursul istoriei sale îndelungate. Pentru că ea atinge tocmai metoda axiomatică care în concepția lui Hilbert trebuia să joace rolul fundamental în matematică, metodă a cărei evoluție milenară a fost deja descrisă de noi începînd cu Euclid. Ne gîndim aici la acel curent de idei care începe cu celebra lucrare a lui K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der „Principia Mathematica" und verwandter Systeme*[25]. Autorul arată în acest studiu că în sistemul logico-matematic al lui Russell și Whitehead, expus în lucrarea lor comună, *Principia Mathematica*[26], precum și în toate sistemele înrudite, care sînt destul de expresive pentru ca în interiorul lor cel puțin aritmetica să poată fi fundamentată din punct de vedere logic, deci

[25] „Monatshefte für Mathematik und Physik", 38, 1931, pp. 175—198.

[26] A. N. Whitehead și B. Russell, *Principia Mathematica*, Cambridge, ed. 1, 1910—1913; ed. a 2-a, 1925—1927.

Scanned with OKEN Scanner

că în toate asemenea sisteme există propoziții indecidabile, care sînt, cu toate acestea, „adevărate".

Aceasta înseamnă că sistemul clasic expus în *Principia Mathematica* este incomplet. Se demonstrează, în continuare, că acest fapt nu constituie un neajuns incidental al sistemului lui Russell-Whitehead, care ar putea fi în acest caz corectat, ci că orice sistem aparținînd acestui tip „clasic" este în mod necesar incomplet. Și, mai mult decît atît, există încă un aspect al acestui rezultat care are o covîrșitoare importanță pentru teoria demonstrației: clasei propozițiilor indecidabile în cadrul teoriei clasice, deci clasei acelor propoziții care nu pot fi nici demonstrate nici combătute, îi aparține însăși propoziția care enunță consistența sistemului! Rezultă de aici că lipsa de contradicție a unui asemenea sistem nu poate fi demonstrată cu mijloacele logice ale aceluiași sistem.

Gödel a descoperit prin aceasta motivul profund al nereușitelor întîmpinate de Hilbert în încercările sale de a demonstra consistența teoriei complete a numerelor. Eșecul provine în mod evident din faptul că Hilbert vroia să-și construiască „metamatematica" pe o cale strict finită, în sensul elementar al termenului. El a admis numai considerații metamatematice strict finite și n-a acceptat decît utilizarea inducției complete obișnuite, așa cum se procedează în aritmetica elementară. Abia după ce Gentzen a depășit în anul 1936 aceste limite, utilizînd o formă a inducției, respectiv a recursiei care progresează după succesiunea numerelor ordinale transfinite ale lui Cantor (a doua clasă de numere; numerele ordinale transfinite sînt utilizate aici pînă la așa-numitul „primul număr epsilon"), deci abia după aceste realizări, Gödel a reușit să demonstreze consistența teoriei numerelor. Dar o dată cu introducerea metodei lui Gentzen, oricît de precaut ar fi procedat autorul ei, oricît de multă evidență i-ar fi atribuit, cadrul premiselor finitiste, în sensul lor inițial, stabilit de Hilbert a fost depășit. Dar împreună cu aceasta a fost depășit implicit și cadrul logic din *Principia Mathematica.* Deși Russell și Whitehead nu au ținut cont de maximele strict finitiste ale lui Hilbert, ba nici măcar de cerințele mai puțin exigente ale intuiționiștilor, totuși întreaga construcție a „teoriei tipurilor", elabo-

Scanned with OKEN Scanner

rată de ei în scopul eliminării antinomiilor logico-mulțimiste, a rămas într-un sens finitistă. Într-adevăr numărul straturilor logice suprapuse, construite unele deasupra celorlalte („tipurile" și „ordinele"), rămîne în teoria lor mereu finit, chiar dacă nu li se poate impune o limită superioară. Gödel a arătat încă în anul 1931 că propozițiile „adevărate", despre care el a demonstrat că în sistemul expus în *Principia Mathematica* sînt indecidabile, pot fi, totuși, demonstrate imediat ce se introduce o mulțime de straturi logice noi, de putere transfinită. El nu a elaborat însă această idee în detalii.

Marea însemnătate a lucrării lui Gödel este, prin acestea, pe deplin justificată. Vom încerca acum, în cele ce urmează, să expunem mersul ideilor lui Gödel, fără a intra, desigur, în detalii tehnice, și să oferim astfel cititorului o oarecare imagine despre această importantă demonstrație.

6

Pentru a introduce cititorul în cercul ideilor lui Gödel, să pornim de la antinomia lui Richard[27]. Ea este o antinomie „semantică". Acestea sînt de un tip puțin diferit de antinomia lui Russell, deoarece conțin, ca părți esențiale, concepte care se referă la teoria limbii (gramatică, semnificație, sintaxă etc.) și la teoria cunoașterii (adevăr, demonstrabilitate etc.).

Antinomia lui Richard[28] poate fi redată precum urmează:

Să considerăm anumite definiții de proprietăți ale numerelor naturale, exprimate într-o limbă precisă, de exem-

---

[27] Urmăm aici adesea prezentarea lui A. Mostowski, *Sentences Undecidable in Formalized Arithmetic. An Exposition of the Theory of Kurt Gödel*, Amsterdam, 1952, *Introduction*, pp. 1—13. O prezentare a întregului complex de probleme, dintr-un punct de vedere puțin diferit, se găsește în P. Lorenzen, *Formale Logik*, pp. 95—99, 121—136.

[28] J. Richard, *Les principes des mathématiques et le problème des ensembles*, în „Revue générale des sciences pures et appliquées", 14, 1905, p. 541 și urm.

Scanned with OKEN Scanner

plu în limba română, și, eventual, cu ajutorul unor semne matematice. Mulțimea acestor definiții este, desigur, numărabilă și tocmai de aceea totalitatea definițiilor poate fi înșirată într-o succesiune în care fiecare definiție va purta ca indice de ordine un număr natural. Fie această ordonare făcută după numărul de litere pe care îl conține fiecare definiție, iar în cazul unor definiții cu același număr de semne, acestea să fie ordonate în ordine lexicografică. Astfel, vom obține, bunăoară, următoarea succesiune:

(1) $$W_1, W_2, W_3, \ldots, W_n.$$

Se poate pune acum întrebarea (deoarece toate proprietățile W reprezintă numere întregi), dacă un număr determinat n posedă sau nu proprietatea W_p. În caz afirmativ, vrem să exprimăm acest fapt în următoarea propoziție „$W_p(n)$ este adevărat"; în caz contrar, vom spune: „$W_p(n)$ este fals" sau „non-$W_p(n)$ este adevărat". Considerăm acum un al doilea caz, și anume cazul în care avem tocmai $p = n$. Și anume, vom considera acum cazul în care expresia non-$W_n(n)$ este adevărată. Cînd acest caz are loc, vom spune că „n este richardian". Desigur, proprietatea de „richardian" este ea însăși o proprietate a unui număr, și anume o proprietate enunțată despre un număr în aceeași limbă română și cu aceleași semne matematice. În consecință, ea trebuie să figureze, neapărat, în catalogul proprietăților numerelor construite mai înainte. Ea trebuie, așadar, să figureze în lista proprietăților W, ocupînd acolo un loc precis. Fie indicele acestei proprietăți egal cu q. Aceasta înseamnă că avem:

(2) $$W_q(n) \textit{ aequivalet } \text{non-}W_n(n).$$

Să punem acum în această echivalență $q = n$, ceea ce este permis, deoarece n este un număr arbitrar ales; ajungem astfel la o contradicție, deoarece în baza echivalenței (2), urmează:

(3) $$W_q(q) \textit{ aequivalet } \text{non-}W_q(q),$$

ceea ce constituie o contradicție evidentă*.

* Indicii definițiilor W_i sînt, pe rînd, numerele 1, 2, 3, ..., n, iar această succesiune poate fi finită sau infinită. Spunem că un în-

Scanned with OKEN Scanner

Soluția acestei antinomii este oferită de distincția și separarea foarte precisă dintre două nivele deosebite ale limbajului: limbajul primitiv (limba-obiect) și metalimba, adică acel limbaj care vorbește despre limba primitivă. („Limba-obiect" constituie, așadar, însuși obiectul acestei metalimbi.) De exemplu, într-o gramatică a limbii latine pentru elevi de limba germană, latina este limba-obiect, iar cea germană este metalimba, deoarece în acest manual se vorbește despre limba latină în limba germană.

---

dice p posedă proprietatea de „richardian", dacă numărul p nu se bucură de proprietatea exprimată în definiția W_p, al cărei indice este de fapt. De exemplu, să presupunem că succesiunea definițiilor a fost în așa fel alcătuită, încît pe locul $i = 16$ se află tocmai definiția numărului pătrat. În acest caz, numărul 16, în mod evident, nu este richardian, deoarece el este un număr pătrat și este tocmai indicele definiției numărului pătrat. În schimb, numărul 25 poate fi richardian, deoarece pe locul cu indicele $i = 25$ nu figurează definiția numărului pătrat. Dar poate, desigur, să fie și 25 richardian, și anume dacă pe locul de indice $i = 25$ figurează vreo altă proprietate de care se bucură numărul 25, de exemplu, proprietatea „multiplu de 5". Numărul 25 este richardian numai dacă pe locul de indice $i = 25$ figurează o proprietate care în mod cert nu i se aplică lui 25, de exemplu, definiția numărului par sau cea de număr prim. Acum, oricum am defini proprietatea de „richardian" în limba română, această definiție va fi inserată în succesiunea definițiilor W. Ocupînd acolo un loc determinat, ne putem întreba dacă indicele său este un număr richardian sau nu. Fie, de exemplu, indicele proprietății „richardian" egal cu $r = 9$, deci W_9 reprezintă în ordonarea noastră definiția proprietății de richardian. Ne întrebăm: însuși numărul „9" este richardian sau nu? Să presupunem că numărul „9" este richardian. Conform definiției inițiale, date acestei proprietăți, un număr este richardian dacă definiția — al cărei indice este — nu se referă la el. Deci, dacă numărul „9" este richardian, înseamnă că definiția W_9 nu se referă la el. Dar semnificația definiției W_9 este tocmai de a fi richardian. Urmează că: dacă „9" este richardian, atunci nu este W_9, deci, atunci nu este richardian. Să presupunem acum contrariul, și anume că numărul „9" nu este richardian; atunci, conform definiției de mai sus a acestei proprietăți, definiția care poartă indicele $i = 9$ trebuie să exprime o proprietate a numărului „9". Or, această definiție W_9 este tocmai aceea a proprietății de „richardian", deci „9" trebuie să fie și el un număr richardian. Urmează deci că: dacă „9" nu este richardian, atunci definiția W_9 exprimă tocmai o proprietate de-a lui, în consecință este richardian. Rezultă evident, din acestea, că arbitrarul aparent în alegerea de mai sus pentru $n = q$ nu face decît să exprime absoluta noastră libertate de a atribui definiției proprietății de „richardian" orice indice, pentru că apariția paradoxului nu este legată de alegerea vreunui indice determinat. — *N.T.*

Scanned with OKEN Scanner

Dacă aplicăm acum această distincție antinomiei noastre, este ușor de observat că proprietatea de „richardian“ nu aparține limbii primitive, ci metalimbajului. Într-adevăr, ea se referă la o particularitate de natură „gramaticală“ a expresiei W_p asociată numărului n, și anume la particularitatea că în această expresie W, indicele p este diferit de variabila n pe care o conține. În mod evident însă, avem în cele de față o propoziție enunțată într-o metalimbă. Urmează că predicatul „richardian“ nu aparține succesiunii W, adică proprietăților din (1) de care se bucură numerele naturale, și tocmai de aceea nici nu poate fi identificat cu vreun W_q oarecare. Cu aceasta, a fost dezvelită eroarea de raționament, în raționamentul lui Richard*.

---

* Termenul de „eroare de raționament“ (*Schlußfehler*) este utilizat aici de autor într-o semnificație foarte precis circumscrisă. In mod evident, Richard nu păcătuiește împotriva nici uneia din regulile cunoscute ale deducției logice. Este însă tot atît de evident că el nu respectă distincția între limbajul-obiect și metalimbaj, distincție ce nu figurează printre legile logicii formale clasice. Dacă acceptăm necesitatea unei asemenea distincții, ca o lege fundamentală a raționamentului, atunci și numai atunci se poate vorbi de o *eroare* de raționament comisă de Richard. Este însă problematic dacă o asemenea distincție poate fi întotdeauna respectată cu consecvență sau nu, și dacă ea este întotdeauna justificată sau nu. Pentru că se poate vorbi, de exemplu, despre limba română și în românește, iar în acest caz distincția dintre limbajul-obiect și metalimbaj devine mai dificil de efectuat. Evident, este ușor de recunoscut că propoziția (1) „Trei culori cunosc pe lume...“ este enunțată într-un limbaj-obiect, în timp ce propoziția (2) „Mult e dulce și frumoasă...“ se referă la cea dintîi și este deci un vers metaromânesc. Ar fi însă greu de motivat de ce într-o înșirare a tuturor propozițiilor românești tipărite pînă acum (numărul lor este finit, operația poate fi așadar executată) ar trebui să introducem o discriminare ierarhică între cele două propoziții și de ce nu am putea să le înșirăm liniar, una după alta. Dar, acceptînd chiar că în cazul de față o asemenea distincție după ierarhia nivelelor poate fi efectuată cu ușurință, problema devine mai dificilă atunci cînd primelor două propoziții le adăugăm propoziția tipărită în momentul de față, ca cea de-a n-a propoziție românească apărută în tipar: (3) „Versurile lui Alecsandri sînt scrise în limba română“. Dacă propoziția (1) este un vers scris de Alecsandri, atunci propoziția (3) este scrisă în limba metaromânească, la fel ca propoziția (2). Dar, dacă și (2) a fost scrisă de Alecsandri, atunci (3) este scrisă într-o limbă metametaromânească. Nemaivorbind de faptul că separarea aceasta rigidă și definitivă a diverselor nivele ale limbajului de-

Scanned with OKEN Scanner

Gödel a recurs acum la un raționament analog cu cel al lui Richard, dar nu pentru a ajunge astfel la un nou paradox, ci ca printr-o modificare și precizare a argumentației genuine să ajungă la un rezultat nou, și anume tocmai la demonstrarea existenței unor propoziții formal indecidabile în *Principia Mathematica*.

Antinomia lui Richard a fost redată în cele de mai sus în limbajul românesc obișnuit al vieții de toate zilele, deci într-un limbaj lipsit de rigoarea necesară, și s-a și demonstrat că întreaga antinomie este doar aparentă, deoarece provine din confundarea limbajului-obiect cu metalimba. Se poate încerca însă reconstruirea esenței sale într-un limbaj riguros formalizat, în care ne vom strădui să eliminăm orice confuzie și orice eroare de raționament.

Să ne imaginăm deci un sistem formal (S) și să considerăm că acesta beneficiază de proprietățile numerelor naturale; cu alte cuvinte, putem formula în (S) „funcții propoziționale" („matrice") cu o singură variabilă, ale căror valori vor fi numere naturale. Să le aranjăm din nou într-o succesiune efectiv numerotată, prevăzută cu indici:

(4) $$W_1, W_2, W_3, \ldots, W_n, \ldots$$

Ne aflăm acum în fața următoarei probleme: este oare numărul n richardian? Cu alte cuvinte, ne aflăm în fața necesității de a exprima cu precizie propoziția:

(5) „n *nu* posedă proprietatea exprimată în W_n".

Ca și mai înainte, aceeași propoziție poate fi exprimată și în felul următor: „$W_n(n)$ nu este adevărat" sau încă, cu ajutorul expresiei „non-$W_n(n)$ este adevărat". Dar conceptul de „adevăr" utilizat aici duce nu numai în filozofia „generală", ci și în logica matematică la dificul-

---

vine cîteodată de-a dreptul imposibil de respectat, pentru că este foarte posibil ca, în ciuda diferențelor de nivel, ele să aibă proprietăți elementare comune, pe baza cărora pot și trebuie să fie comparate și puse pe același plan; de exemplu nu se poate face nici o distincție între o propoziție-obiect și o metapropoziție din punctul de vedere al unor proprietăți cum sînt, bunăoară, următoarele: corectitudinea gramaticală, frumusețea, numărul de semne etc. — *N.T.*

tăți mari, imediat ce încercăm să-i precizăm semnificația (precum a arătat Tarski). În cazul de față putem înlocui expresia de „adevăr“ cu conceptul „demonstrabil“, mult mai ușor de definit și de lămurit. Tocmai aceasta a fost calea urmată de Gödel.

Vom exprima termenul de mai sus într-o formă mai precisă prin următorul enunț mai complet: „formal demonstrabil în sistemul formalizat (S)“. Formal „demonstrabile“ sînt tocmai axiomele și teoremele sistemului (S). S-ar putea obiecta că noțiunea de demonstrabilitate ascunde în sine conceptele dificile de capacitate sau posibilitate. Dar nu este așa. O teoremă este demonstrabilă dacă i se poate asocia un lanț (la nevoie, un lanț cu ramificații) de propoziții legate între ele prin reguli de deducție, lanț care începe cu axiomele sistemului (S) și se termină cu teorema „demonstrată“. Pentru a defini, așadar, noțiunea de „demonstrabilitate“, avem nevoie de conceptul precis al deducției în sistemul (S), ceea ce într-un sistem formalizat ca (S) trebuie să ne stea de la început la dispoziție, precum și de cuantorul existențial „există (cel puțin) un...“, noțiune binecunoscută în logica matematică (în calculul predicatelor de ordinul întîi).

Acum sîntem în măsură să formulăm enunțul (5) în felul următor:

(6) „Propoziția $W_n(n)$ *nu* este demonstrabilă în (S)“.

Pînă acum totul este în regulă. Acum însă, pentru a urma și pe mai departe mersul ideilor din antinomia lui Richard, trebuie să identificăm însăși proprietatea din (6) a numărului n cu una din proprietățile W_i. Și acum dăm imediat de o dificultate nouă și, pe cît se pare, de natură decisivă.

Și astfel am ajuns tocmai la punctul în care caracterul eronat al paradoxului lui Richard a fost „demascat“ prin disocierea clară a limbajului primitiv de metalimbaj. În formularea (6) apar expresiile „propoziție“ (*sentence*) și „demonstrabil“. Acestea sînt în mod evident expresii „gramaticale“ ce aparțin „sintaxei“ acelei limbi în care este formulată $W_n(n)$, adică sintaxei limbii sistemului formalizat (S). Ele nu aparțin deci limbajului „primitiv“ al sistemului (S), ci metalimbajului, deci aparțin limbii în

Scanned with OKEN Scanner

care se vorbește *despre* sistemul (S), și anume despre sintaxă, deci despre gramatica acestuia. Avînd în vedere acest fapt, pare de la început exclusă posibilitatea de a identifica, chiar numai și în extensiune, proprietatea numărului n exprimată în formula (6) cu un W_q, cum ar trebui să fie în baza acestor considerații care imită mersul argumentului antinomiei lui Richard. Tocmai această identificare a constituit punctul în care argumentul richardian s-a abătut pe calea erorii, conducîndu-ne la contradicția cunoscută. Dar cum putem ajunge aici la un raționament corect și să eliminăm astfel contradicția?

Gödel a reușit să ducă la bun sfîrșit această operă magistrală prin intermediul unui artificiu spiritual, care a primit denumirea de „aritmetizarea metamatematicii". El pornește de la faptul că, privită dintr-un punct de vedere cu totul exterior, o formulă logico-matematică este constituită dintr-o succesiune finită de semne, exprimînd constante și variabile logice, precum și numere. Gödel a numerotat toate semnele (ceea ce este posibil desigur, pe mai multe căi), obținînd astfel o corespondență biunivocă între expresii logico-matematice și succesiuni finite de numere naturale. Dat fiind însă că succesiunilor finite de numere naturale li se pot asocia în mod biunivoc numere în mai multe feluri, devine posibil ca și argumentele întregi să fie pe această cale numerotate.

Un procedeu deosebit de simplu și elegant pentru o asemenea „aritmetizare" (care diferă însă de metoda genuină a lui Gödel) a fost dat de W. V. Quine[29]. După Quine, calculul logico-aritmetic, care este suficient pentru exprimarea cu ajutorul lui a teoriei numerelor, poate fi scris în întregime cu ajutorul următoarelor semne:
Semne logice: $\sim$ (nu), & (și), () (paranteze);
Semne aritmetice: $=$ (egal), $+$ (plus), . (ori), x (variabilă), $'$(succesorul lui...);
(x)...înseamnă: „pentru orice x...";
x, x', x'', x''',... reprezintă oricît de multe variabile;
($'$), ($''$), ($'''$),... sînt semne pentru numerele 1, 2, 3,...
Celelalte semne logice utilizate de obicei pot fi reduse

[29] W. V. Quine, *Methods of Logic*, New York, 1950, p. 245 și urm.

Scanned with OKEN Scanner

la cele introduse aici cu ajutorul unor definiții prin intermediul unor procedee cunoscute[30].

Este nevoie, așadar, în total de numai nouă semne, care pot fi numerotate cu cele nouă cifre ale sistemului zecimal:

$$\begin{array}{cccccccccc} \sim & \& & (&) & = & + & . & x & ' \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

Orice expresie scrisă cu semnele originale poate fi acum ușor transpusă în „cifru". De exemplu, fie propoziția: „pentru orice x este adevărat că x este egal cu x"; transpusă în formulă cu ajutorul semnelor date, ea va îmbrăca următoarea formă:

$$(x)\ (x = x),$$

iar cifrul corespunzător formulei va fi: 38438584. Succesiuni de expresii pot fi exprimate de asemenea prin intermediul unui singur număr, astfel că cifrurile expresiilor unitare sînt separate între ele prin cifra 0. Procedeul poate fi repetat cînd avem grupe întregi de expresii, intercalînd între cifrurile grupelor perechea de cifre 00 ș.a.m.d.[31]

Pe baza acestei operații de cifrare sau de aritmetizare, putem asocia în mod biunivoc fiecărei clase, respectiv fiecărei relații dintre expresii, o clasă, respectiv o relație dintre numere, care pot fi în multe cazuri definite pe o cale pur aritmetică și, de aceea, pot fi de asemenea exprimate în sistemul (S). Într-adevăr, Gödel a reușit (ceea ce nu poate fi redat aici în toate amănuntele) să reprezinte expresii de metalimbaj ca: „propoziție", „demonstrabil" ș.a. cu ajutorul unor concepte aritmetice. În

---

[30] Astfel se definește „*p vel q*" (p sau, și q) cu următoarea formulă: $\sim(\sim p \,\&\, \sim q)$; „*p implicat q*", prin: $\sim(p \,\&\, \sim q)$; „*p aequivalet q*", prin: (p *implicat* q) & (q *implicat* p); $(Ex)\,(Px)$ („există un x care posedă proprietatea p") prin: $\sim(x) \sim P(x)$.

[31] Metoda lui Quine este legată, în forma descrisă mai sus, de cel mult nouă semne. Se poate aplica însă și un alt sistem de numărare, de exemplu sistemul sexagesimal babilonean, cu 59 de cifre. Pe de altă parte, le putem aranja și în așa fel încît să ne ajungă și sistemul binar, deci numai cifrele 0 și 1. Vezi P. Lorenzen, *Formale Logik*, pp. 97—98.

Scanned with OKEN Scanner

acest fel a devenit posibil ca formulări date în metalimbaj, ca aceea de la (6), să fie reprezentate cu ajutorul unor propoziții de teoria numerelor care aparțin sistemului (S). Astfel am ajuns să înlocuim expresii de metalimbă cu expresii ale limbajului primitiv sau, cel puțin, am reușit să asociem fiecărei propoziții a metalimbii cîte o teoremă de aritmetică, în așa fel încît aceasta din urmă este în mod cert o reprezentare fidelă a celei dintîi.

Raționamentul nostru poate fi continuat acum în felul următor:

Fie $\varphi(n,p)$ numărul gödelian al propoziției $W_n(p)$; fie, mai departe, T clasa numerelor gödeliene a teoremelor sistemului (S). Caracterizarea proprietății (6), adică a celei analoge cu proprietatea „richardian", poate fi formulată acum precum urmează: „$\varphi(n,n)$ nu aparține ca element clasei T" sau, în notația cunoscută:

(7) $$\varphi(n, n) \text{ non} \in T.$$

Însă, deoarece $\varphi(n,n)$ este un număr, iar T o clasă de numere, enunțul (7) constituie de asemenea o propoziție aritmetică în (S). Există, așadar, o propoziție W_q în (S) care caracterizează proprietatea (7).

Și acum să înlocuim numărul q în W_q; obținem astfel analogonul expresiei „critice" $W_q(q)$ care a produs antinomia lui Richard. Dar care este acum, în noile condiții, semnificația „intuitivă" a acestei propoziții? Ea spune că numărul q posedă proprietatea definită de expresia W_q. Dar W_q este o expresie formalizată pentru propoziția verbală (6) și ea spune următoarele:

(8) $$\varphi(q,q) \text{ non} \in T,$$

ceea ce, din cauza echivalenței expresiilor (6) și (7), înseamnă:

(9) $W_q(q)$ este nedemonstrabilă.

Am ajuns astfel să descifrăm sensul intuitiv al expresiei $W_q(q)$: această propoziție enunță că ea însăși este nedemonstrabilă.

Există aici o analogie evidentă cu paradoxul antic al „mincinosului" (*pseudomenos*). Această propoziție paradoxală în forma ei antică este formulată foarte ascuțit

Scanned with OKEN Scanner

cu ajutorul unui singur cuvînt grec, „*pseudomai*“: „eu spun (acum) ceva neadevărat“ (tradus, adesea, în mod incorect cu expresia: „eu mint“). Această propoziție stabilește propriul său neadevăr. Dacă ea este, așadar, adevărată, atunci este neadevărată, și invers. Ea se deosebește totuși de propoziția gödeliană prin aceea că în locul conceptului vag de adevăr, din paradoxul „mincinosului“, la Gödel stă expresia mai limitată și mai precisă de nedemonstrabilitate. Într-adevăr, la el este vorba de demonstrabilitatea unei propoziții cu ajutorul mijloacelor logice ale sistemului (S). Conceptul de „adevăr“ nu se lasă însă definit atît de precis și strîns. Tocmai de aceea se întîmplă că Gödel poate afirma că propoziția $W_q(q)$ este fără îndoială nedemonstrabilă, ea fiind însă, cu toate acestea, „adevărată“, într-un sens exterior sistemului (S), deoarece în interiorul sistemului (S) ea este efectiv nedemonstrabilă.

Mai rămîne să arătăm că propoziția $W_q(q)$ este în sistemul (S) indecidabilă. Pentru că, dacă ar fi demonstrabilă, atunci lucrurile s-ar petrece exact așa cum afirmă ea însăși: ar fi deci nedemonstrabilă tocmai în acest caz (din moment ce ea enunță propria sa indemonstrabilitate). Dacă, dimpotrivă, negația ei, deci non-$W_q(q)$, ar fi demonstrabilă, atunci lucrurile ar trebui să se petreacă exact așa cum se afirmă în această propoziție negativă; propoziția ar putea fi deci combătută (ar fi refutabilă) și tocmai de aceea lucrurile nu ar sta așa precum afirmă ea. Însă, din moment ce conținutul său afirmă că ea este nedemonstrabilă, ar însemna că tocmai aceasta nu are loc. Ar fi deci demonstrabilă și, în consecință, irefutabilă.

Întregul curs al argumentației amintește mult de cel urmat în paradoxul „mincinosului“, fără să ducă însă la o contradicție proprie. Pentru că este absurd ca o propoziție să nu fie nici adevărată, nici falsă, dar nu este de loc absurd ca o propoziție să nu fie nici demonstrabilă, nici refutabilă. În acest caz ea este numai indecidabilă în interiorul sistemului (S).

În cele precedente nu am putut oferi decît o schiță a demonstrației gödeliene, fără pretenția unei prezentări amănunțite și riguroase. Intrarea în amănunte ne-ar

Scanned with OKEN Scanner

fi dus aici prea departe de scopul pe care-l urmărim. Trebuie să acordăm însă mai multă atenție aici unei consecințe deosebit de importante ce rezultă din considerațiile lui Gödel cu privire la structura logică a metodei axiomatice în ansamblul ei. Pentru că de aici rezultă că lipsa de contradicție a unui sistem formalizat (S) nu poate fi nici demonstrată, nici combătută cu mijloacele logice care stau la dispoziția sistemului (S) însuși, această propoziție fiind deci indecidabilă în sistem[32].

La demonstrarea indecidabilității propoziției $W_q(q)$ în sistemul (S), însăși consistența sistemului (S) a fost dinainte presupusă. Rezultatul obținut de Gödel poate fi rezumat, așadar, precum urmează:
(G) „Dacă (S) este consistent, atunci $W_q(q)$ este indecidabil în (S)".

Dar însăși propoziția care enunță consistența lui (S) poate fi formulată în limbajul sistemului (S). Să notăm această propoziție, formulată în acest fel, cu semnul WF. De asemenea, și propoziția „$W_q(q)$ este indecidabilă în (S)" este o propoziție formulabilă în (S). Această propoziție nu este altceva decît însuși enunțul $W_q(q)$. Însăși demonstrația lui Gödel poate fi acum reprezentată în sistemul (S) și obținem astfel formula următoare:

(G') $$WF \text{ implicat } W_q(q),$$

demonstrabilă în sistemul (S).

(G') nu este decît exemplarul formalizat al enunțului verbal (G). Presupunînd acum că s-ar putea demonstra în (S) că însuși sistemul (S) este consistent, ar trebui ca WF să fie neapărat demonstrabilă în (S). În acest caz, ar rezulta însă din implicația (G'), prin aplicarea inferenței *modus ponens*, că $W_q(q)$ are loc (este „adevărată"), și anume, în baza considerațiilor noastre precedente, însăși $W_q(q)$ ar fi primit o demonstrație. Aceasta contrazice însă rezultatul central al lui Gödel, în virtutea căruia $W_q(q)$ este nedemonstrabilă. Așa încît ipoteza care susține că ar fi posibilă demonstrarea consistenței sistemu-

---

[32] Vezi prezentarea lui W. Stegmüller, *Das Wahrheitsproblem und die Idee der Semantik*, Wien, 1957, p. 208 și urm.

Scanned with OKEN Scanner

lui (S) chiar în interiorul lui (S) duce la o contradicție și, de aceea, nu este corectă.

Acest rezultat paradoxal este bazat pe o demonstrație corectă și este, de asemenea, consistent în sine (el nu este „antinomial"). Totuși, el părea să zdruncine teoria demonstrației a lui Hilbert, cel puțin în forma inițială a acesteia, și, mai mult decît atît, chiar valabilitatea metodei axiomatice în ansamblul ei. Acestui rezultat i s-au adăugat încă altele, obținute de alți cercetători, de exemplu acela al lui Th. Skolem, care a arătat că nici un sistem de axiome al teoriei numerelor nu este „categoric". Cu alte cuvinte, orice asemenea sistem, stabilit pentru descrierea șirului natural al numerelor, și-ar mai extinde valabilitatea, afară de numerele naturale, și asupra altor obiecte matematice.

Cercetările ulterioare ale lui A. Tarski și Wang Hao au dus la posibilitatea de a interpreta rezultatele lui Gödel și altele asemănătoare într-o formă mai blîndă. Astfel, de exemplu, Tarski a înlocuit propoziția negativă a lui Gödel cu următoarea formulare pozitivă[33]: Dacă într-un sistem (S) se construiește o propoziție P, indecidabilă în (S), atunci în metateoria lui (S), în care figurează noțiunea fundamentală de „propoziție adevărată", se poate decide dacă P este adevărată sau falsă. Înseamnă, deci, că în metateoria lui (S) se poate obține o decizie cu privire la valoarea logică a lui P. La rîndul său, Wang Hao a dezvoltat un sistem logico-matematic deosebit de cuprinzător[34], care constă dintr-o reuniune a unei succesiuni infinite de sisteme din ce în ce mai bogate. Pentru sistemul de indice α (care poate fi și transfinit), se poate obține — prin utilizarea noțiunii de adevăr — o demonstrație de consistență în sistemul de indice $\alpha+2$. Astfel, propozițiile demonstrate de Gödel ca fiind indecidabile în primul sistem devin decidabile în cel de-al doilea. Astfel îi reușește lui Wang Hao să elimine complet din sistemul său propozițiile nedecidabile și să depă-

---

[33] Pentru amănunte, vezi W. Stegmüller, *op cit.*, p. 253 și urm.

[34] Wang Hao, *The Formalization of Mathematics*, în „Journal of Symbolic Logic", 19, 1954, pp. 241—266.

Scanned with OKEN Scanner

şească, într-un sens, incompletitudinea gödeliană. (Pentru aceasta mai trebuie să presupunem însă că teoria lui Wang Hao, care pînă acum a fost prezentată doar într-o formă schiţată, poate fi dezvoltată în toate amănuntele sale.)

Rezultatul final la care duc consideraţiile premergătoare ne permite să conchidem că nici chiar dificultatea care, după toate aparenţele, se credea a fi cea mai serioasă dintre toate pe care le-a întîlnit vreodată gîndirea matematică nu a dus la veritabila „situaţie-limită". Dimpotrivă, renunţarea la anumite procedee de argumentare pe care le oferea în mod special gîndirea naivă nu a dus la o stare de resemnare, ci mai curînd la o aprofundare şi rafinare a gîndirii. Se poate spune de-a dreptul că în toate acestea se manifestă o oarecare trăsătură „dialectică" a gîndirii matematice, desigur, o dialectică de alt gen decît cea a lui Hegel, şi de altceva decît de cunoscuta teză hegeliană despre „infinitul rău" al matematicii. Plictiseala de moarte a înaintării sale monotone este redusă la absurd chiar prin această specifică „dialectică" de un tip nou, pe care ne-o oferă gîndirea matematică.

Această trăsătură dialectică a apărut la lumina zilei încă în secolul al V-lea î.e.n., în matematica pitagoreică. Am avut ocazia mai sus să vorbim despre evenimentele care au avut loc atunci. Pentru că, în momentul în care a fost efectuată pentru prima dată în istoria matematicii o demonstraţie de imposibilitate, şi anume demonstrarea incomensurabilităţii diagonalei pătratului sau a pentagonului regulat cu latura, în acest moment a apărut un fenomen spiritual de cea mai mare importanţă. Demonstrarea riguroasă a imposibilităţii de a rezolva o problemă matematică nu a dus nici atunci la o stare de resemnare, ci a avut ca efect mărirea gradului de elasticitate şi a forţei de pătrundere a gîndirii. Astfel se întîmplă şi în zilele noastre.

7

Pornind în căutarea limitelor imanente ale gîndirii matematice, nu am reuşit să găsim pînă acum nimic decisiv

Scanned with OKEN Scanner

în această privinţă. Presupusa „situaţie-limită“ s-a dovedit a fi, la o analiză mai atentă, o simplă aparenţă, iar renunţarea fatală la rezolvabilitatea unor probleme determinate nu a avut niciodată semnificaţia unei autodizolvări a gîndirii. Însăşi gîndirea a devenit mai conştientă, deoarece situaţia arătată a dus la deşteptarea acelei gîndiri care, depăşind stadiul său de naivitate, a devenit coaptă pentru critică, ajungînd astfel la un mai mare rafinament şi la o mai mare profunzime. Mai există, totuşi, un aspect al multiplelor probleme care au putut fi tratate aici numai într-un mod incomplet, legat de problema indecidabilităţii arătate mai sus de noi, precum şi de constructivismul „intuiţionist“, aspect care pare să aducă cu o asemenea limită imanentă a gîndirii matematice. Este vorba de critica noţiunii de putere nenumărabilă şi de precizarea conceptului de calculabilitate, precum şi de alte noţiuni înrudite.

În ceea ce priveşte prima chestiune, trebuie să spunem că îndoiala critică în nenumărabilitatea (absolută) a unor mulţimi, de exemplu a continuului, îşi are originea încă într-o lucrare a lui L. Löwenheim, apărută în anul 1915 şi continuată apoi de cercetările lui Th. Skolem[35]. Rezultatul acestor cercetări a fost exprimat în aşa-numita „teoremă a lui Löwenheim-Skolem“, care afirmă că dacă o expresie a calculului predicatelor de ordinul întîi poate fi în principiu satisfăcută, atunci ea poate fi satisfăcută într-un domeniu de variabile de putere numărabilă (sensul termenului „numărabil“ este luat aici conform teoriei clasice a mulţimilor, elaborată de Cantor). Dar teoria clasică a mulţimilor poate fi axiomatizată tocmai cu ajutorul calculului predicatelor de ordinul întîi. Teorema lui Löwenheim-Skolem afirmă deci că teoria mulţimilor, dacă admite cumva un model, atunci admite implicit şi un model numărabil. Dar aceasta înseamnă că nu poate exista o mulţime nenumărabilă în sensul absolut al termenului.

---

[35] L. Löwenheim, *Über Möglichkeiten im Relativkalkül*, în „Mathematische Annalen“, 76; Th. Skolem, *Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit* etc., în „Vid. Skrifter Akad. Oslo“, I, Mat.-nat. Kl., nr. 4, 1920.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrarea teoremei Löwenheim-Skolem nu este constructivă[36]. Ea nu poate servi, în consecință, pentru producerea „efectivă" a unui model numărabil pentru reprezentarea teoriei mulțimilor. (Nici consistența absolută a teoriei clasice a mulțimilor nu este demonstrată.) S-ar putea crede că procedeul diagonal al lui Cantor, prezentat de noi mai sus și care demonstrează caracterul nenumărabil al continuului, ar sta în contradicție cu teorema L.-Sk. Dar am atras atenția încă atunci cînd am prezentat procedeul diagonal al lui Cantor că, cu toată impresia contrară, de prim moment, acesta nu are un caracter constructiv, și, în consecință, nici nu poate servi la producerea efectivă a puterii nenumărabile a continuului, de exemplu în forma unei mulțimi de fracții zecimale infinite. Astfel, procedeul cantorian nu poate servi la o combatere nemijlocită a teoremei L.-Sk.

Întreaga dilemă se rezolvă la o cercetare mai apropiată, indicînd necesitatea de a da o interpretare relativă noțiunii de numărabilitate. O mulțime este „numărabilă" cînd — precum se știe — poate fi proiectată pe mulțimea numerelor naturale, prin intermediul unei corespondențe biunivoce. Există însă mulțimi care nu sînt numărabile (dacă utilizăm un procedeu concret determinat de proiectare), și care devin mulțimi numărabile imediat ce se admit și alte procedee de proiecție. Iată că prin aceasta se dovedește a fi relativ un concept care înainte a fost utilizat, cu o oarecare naivitate, într-un sens absolut.

Dacă, interpretată în mod corect, teorema L.-Sk. nu duce la un paradox sau la o antinomie, ea ne atrage totuși atenția asupra existenței unei limite remarcabile care pare să stea în fața procesului de construcție a conceptelor matematice, cel puțin în cazul cînd aceste concepte sînt construite cu intenția de a respecta cerința severă a unei extreme precizii. Pentru că, pare să rezulte din cele precedente că motive logice se opun depășirii puterii numărabile. Edificiul mîndru al teoriei mulțimilor, con-

---

[36] Vezi H. Hermes și H. Scholz, *op. cit.*, nr. 3, 7, 1—2 (pp. 23—24);
D. Hilbert și W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1949, § 10 (în special p. 82 și urm.).

Scanned with OKEN Scanner

struit de Cantor, cu considerațiile sale care pătrund adînc în domeniul puterilor absolut nenumărabile (fiind vorba mereu de mulțimi actual-infinite!) pare să se dovedească astfel a nu fi decît o simplă fantasmagorie, un fel de apariție, o fata morgana, care se risipește pe măsură ce ne apropiem de el.

În orice caz, ajungem aici la o autolimitare a gîndirii matematice și, cu această ocazie, am vrea să adăugăm cîteva precizări cu privire la conceptele prin intermediul cărora se exteriorizează această autolimitare. Este vorba de un grup de concepte strîns legate între ele, și anume de următoarele: *calculabilitate*, *enumerabilitate*, *decidabilitate și constructibilitate*[37]. Pentru scopul urmărit de noi sînt importante doar definițiile acestor concepte și nu aplicațiile lor la demonstrații efective de indecidabilitate și altele de acest fel. Prezentarea și analiza acestora ne-ar duce prea departe de scopul propus de noi în cartea prezentă. Vrem să observăm doar atîta, că metoda acestor demonstrații urmează, în esență, linia demonstrației gödeliene prezentată în paragraful precedent, care înaintează deci în zigzag sau de-a lungul traiectoriei antinomiilor, după modelul „mincinosului", sau de-a lungul procedeului diagonal al lui Cantor.

În ceea ce privește acum înseși aceste concepte „critice", rădăcinile istorice ale acestora se află în anumite procedee de calcul care duc la sfîrșit într-un număr finit de pași, în opoziție cu procedeele de aproximație, care nu se termină niciodată, cum este, de exemplu, cunoscutul procedeu care aproximează treptat valoarea lui $\sqrt{2}$. Un exemplu clasic al unui asemenea procedeu finit îl constituie așa-numitul „algoritm euclidian" (*Elemente*, VII. 1, 2) pentru determinarea celui mai mare divizor comun a două numere întregi: procedeul se termină după un număr finit de pași sau la cel mai mare divizor comun, sau la 1. Acest din urmă caz are loc atunci cînd cele două numere sînt relativ prime. Procedeul constă, așadar, în

---

[37] O clară prezentare de ansamblu vezi la H. Hermes și H. Scholz, *op. cit.*, nr. 9, pp. 46—52, iar cu privire la probleme speciale de decidabilitate, nr. 10—11, pp. 52—57; tot acolo se găsește și o bibliografie cuprinzătoare.

Scanned with OKEN Scanner

calcularea efectivă a numărului căutat, oferind totodată şi decizia categorică în privinţa întrebării dacă cele două numere sînt relativ prime sau nu. O problemă analogă se ridică şi atunci cînd se pune problema dacă o ecuaţie diofantică dată (adică o ecuaţie cu soluţii întregi) este rezolvabilă sau nu. Formulată în termeni generali, problema care stă în faţa noastră este deci următoarea: trebuie decis dacă o anumită propoziţie aparţine unei anumite clase de propoziţii sau nu, respectiv şi mai general: dacă o figură (un şir finit de semne) aparţine sau nu unei clase determinate de figuri.

O mulţime M se numeşte „enumerabilă“ dacă există dat un procedeu în aşa fel, încît cu ajutorul lui elementele lui M să poată fi enumerate rînd pe rînd, în mod efectiv. Mulţimea M se numeşte decidabilă atunci cînd este dat un procedeu cu ajutorul căruia se poate decide dacă un element arbitrar aparţine mulţimii M sau nu. Există mulţimi care nu sînt enumerabile şi, de asemenea, mulţimi enumerabile şi totuşi indecidabile, în sensul definit aici.

Există acum următoarele relaţii fundamentale de echivalenţă: 1. „M este decidabilă“ = „M şi mulţimea complementară a lui M sînt ambele enumerabile“ = „f_M este calculabilă“ (sensul semnului f_M este următorul: $f_M(x) = 0$, respectiv 1, după cum $x \in M$ sau nu); 2. „M este enumerabilă“ = „M este domeniul de valori al unei funcţii calculabile“.

Pentru o definire exactă a unei funcţii calculabile se utilizează următoarele caracteristici, care, în acest loc, nu pot face decît obiectul unei simple menţiuni[38]. Se vorbeşte de o „funcţie (general) recursivă“ (Skolem şi alţii), de o „funcţie cu adevărat calculabilă“ (P. Bernays), de o „funcţie lambda-definisabilă“ (A. Church), de „enumerabilitate“ (E. L. Post), de o funcţie calculabilă cu ajutorul unei maşini (A. M. Turing şi Post).

Ultima modalitate a definirii este totodată cea mai intuitivă. Vrem să spunem că în acest caz calcularea

---

[38] Amănunte în H. Hermes şi H. Scholz, *op. cit.*, pp. 48—51.

Scanned with OKEN Scanner

efectivă a funcției poate fi lăsată în întregime pe seama unei mașini automate, a cărei structură a fost descrisă cu precizie de Turing și Post. (Să ne gîndim la instalațiile electronice moderne!)

Caracteristica generală a tuturor acestor definiții este aceea că toate utilizează procedee care înaintează treptat și sînt univoc prescrise, din care cauză devine posibil tratamentul mecanic al calculului și al procesului de decizie. Întrebarea sau problema pusă este astfel rezolvată în mod „efectiv" prin indicarea unui asemenea procedeu. Realizarea în practică a acestuia constituie o muncă pur mecanică, care nu are nevoie de „Spirit"[39].

Desigur, întîlnim aici o limitare bine determinată a gîndirii matematice, totodată însă liber impusă. Sensul acestei constatări va deveni mai clar dacă vom considera problema însemnării, respectiv a construirii univoce a numerelor ordinale transfinite din cea de-a doua clasă cantoriană de numere, problemă pe care vrem s-o prezentăm pe scurt în cele ce urmează.

8

În lucrarea sa, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*[40], care constituie prima prezentare de mari proporții a teoriei mulțimilor, G. Cantor prezintă (în § 11 al lucrării) felul în care poate fi generat șirul numerelor

---

[39] Trebuie să observăm aici că decidabilitatea unui calcul este echivalentă cu enumerabilitatea figurilor sale deductibile *și* nedeductibile. Pentru că, poate fi imaginată o mașină care înșiră, „enumeră" pe o primă bandă de hîrtie toate figurile deductibile ale calculului, iar pe o a doua bandă de hîrtie toate figurile nedeductibile, tipărindu-le, de exemplu, pe rînd, una după alta. Ambele benzi au cîte un dispozitiv de citire, care oprește mașina imediat ce apare acea figură a cărei deductibilitate trebuia să fie tocmai decisă. Dacă mașina se oprește și figura apare pe prima bandă, atunci ea este deductibilă; dacă figura apare pe a doua bandă, ea este nedeductibilă. Vezi P. Lorenzen, *op. cit.*, p. 96 și urm.

[40] „Mathematische Annalen", 21, 1883, p. 577; GM, pp. 299—302.

Scanned with OKEN Scanner

ordinale transfinite cu ajutorul a două principii generatoare. Aceste două principii sînt următoarele:

1. Fiecărui număr, o dată format, i se adaugă o unitate (primul număr ordinal fiind 1).

2. Fiecărei succesiuni de numere deja definite, succesiune în care nu există un ultim element, i se asociază un număr special creat, care este conceput ca limita numerelor care aparțin succesiunii, fiind definit, așadar, ca numărul mai mare imediat următor.

Primul principiu generator este banal; el constituie mijlocul de generare a numerelor întregi, finite, pozitive. Exemplul cel mai simplu pentru ilustrarea celui de-al doilea principiu de generare îl constituie producerea celui mai mic ordinal transfinit ω, care urmează imediat după toate numerele ordinale finite, ca numărul ordinal imediat următor:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots \rightarrow \omega.$$

După acest număr urmează apoi, prin aplicarea reiterată la nesfîrșit a primului principiu, iar apoi prin aplicarea celui de-al doilea principiu:

$$\omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots \rightarrow \omega + \omega = \omega \cdot 2.$$

Cantor trece apoi, prin aplicarea obișnuitelor operații de calcul (produsul și ridicarea la o putere), la următoarele numere:

$$\omega \cdot 2,\ \omega \cdot 3,\ \omega \cdot 4, \ldots \rightarrow \omega \cdot \omega = \omega^2$$
$$\omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4, \ldots \rightarrow \omega^\omega$$

$$\omega^\omega,\ \omega^{\omega^\omega},\ \omega^{\omega^{\omega^\omega}},\ \ldots \rightarrow \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} = \varepsilon.$$

(În cele de mai sus am omis, desigur, mare parte din numerele ordinale intermediare.)

Ajungînd aici, la acest „prim număr epsilon", încetează, desigur, doar notarea numerelor cu semnul ω, introducîndu-se noul simbol de bază: ε. Totodată, apare și fenomenul singular, potrivit căruia succesiunea de simboluri,

Scanned with OKEN Scanner

ca să spunem așa, se ajunge din urmă pe sine însăși. Într-adevăr, avem:

$$\varepsilon = \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \omega^{(\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}})} = \omega^{\varepsilon}.$$

Se spune că ε este un „număr critic". În încercarea de a nota numerele ordinale transfinite cu ajutorul semnelor simbolice, se întîlnesc mereu asemenea numere critice, ceea ce ne obligă mereu la schimbarea modalității de notație (la introducerea unor noi simboluri etc.). Nu mai este posibil, de exemplu, ca ordinalele transfinite din cea de-a doua clasă să fie cuprinse sub imperiul unui singur principiu unitar.

Dar Cantor nu s-a oprit la ordinalele din cea de-a doua clasă. Aplicînd cel de-al doilea principiu asupra succesiunii tuturor ordinalelor transfinite din cea de-a doua clasă (deci asupra ordinalelor puterilor infinite și numărabile; de notat că aceste ordinale nu mai pot fi clar definite prin nici un procedeu constructiv unitar), ajunge astfel să „creeze" primul ordinal transfinit nenumărabil, numărul ordinal Ω sau ω_1 cu care începe cea de-a treia clasă de ordinale. Și așa mai departe, într-o manieră deosebit de curajoasă, el a continuat procedeul început conform acestui principiu, obținînd astfel clase de ordinale de un rang din ce în ce mai înalt, pe care noi, aici, nu vrem să le prezentăm în amănuntele lor.

Mai demult, în cadrul teoriei clasice a mulțimilor au fost utilizate „construcții" introduse cu alte ocazii, cu ajutorul celor două principii generatoare[41], ca, bunăoară, în exemplul ce urmează și în care mulți matematicieni au văzut o producere „constructivă" a unei mulțimi bine

---

[41] Totuși, asemenea procedee au mai fost utilizate încă și în zilele noastre. Vezi E. Zermelo, *Grenzzahlen und Mengenbereiche*, în „Fundamenta Mathematicae", XVI, 1936, pp. 29—47; D. Hilbert, *Über das Unendliche*, în „Mathematische Annalen", 95, 1926, pp. 161—190; K. Gödel, *Beweis der Verträglichkeit der allgemeinen Cantorschen Kontinuumsvermutung mit den Zermeloschen Axiomen der Mengenlehre*, în „Proc. Nat. Acad. of Sciences in U.S.A.", 25, 1939, pp. 220—224 și „Ann. of Math. Stud.", nr. 3, Princeton, 1940.

Scanned with OKEN Scanner

ordonate și nenumărabile, avînd tipul de ordine egal cu primul număr al celei de-a treia clase de ordinale transfinite. Procedeul de construcție prezentat în cele ce urmează provine de la G. H. Hardy; cel pe care îl redăm într-o formă simplificată, provine, în esență, de la F. Hausdorff[42].

Este vorba de o succesiune bine ordonată de succesiuni obișnuite, formate din numere întregi obișnuite[43]. Primul principiu generator acționează pentru a ridica cu cîte o unitate valoarea fiecărui număr dintr-o succesiune dată. Cel de-al doilea principiu generator acționează asupra unei succesiuni de succesiuni, ca un procedeu diagonal cantorian aplicat acesteia. Întreaga construcție începe cu o succesiune de unități.

1	1 1 1 1 ...
2	2 2 2 2 ...
3	3 3 3 3 ...
.	. . . .
ω	1 2 3 4 ...
$\omega + 1$	2 3 4 5 ...
$\omega + 2$	3 4 5 6 ...
.	. . . .
$\omega + \omega$	1 3 5 7 ...

La prima vedere avem impresia că acest procedeu ar fi în stare să conducă prin cea de-a doua clasă de ordinale și să ajungem astfel la construirea efectivă a unei mulțimi nenumărabile, compusă din succesiuni de numere. Totuși, la o analiză mai atentă a lucrurilor se adevereşte că nu este așa. Pentru a putea duce procedeul în mod concret şi efectiv la bun sfîrşit, ar trebui să ştim să construim ordinalele transfinite de pe marginea stîngă a schemei, transfinite care servesc aici drept „numere de ordine“ sau indici, pentru a determina astfel succesiunea

---

[42] G. H. Hardy, „Quarterly Journal of Mathematics“, 35, 1903, p. 87; F. Hausdorff, în „Leipziger Berichte, math.-phys. Klasse“, 59, 1907, p. 217.

[43] Fiecăreia din aceste succesiuni i se poate asocia în mod biunivoc cîte o fracție binară, situată în intervalul dintre 0 și 1; de exemplu, succesiunii 1, 3, 5, ... i se asociază fracția binară 0,101110111110 ...

Scanned with OKEN Scanner

de succesiuni asupra căreia ar trebui să se aplice acum cel de-al doilea principiu de generare: procedeul diagonal al lui Cantor. Apare în acest fel problema nouă a determinării *constructive* și a notării ordinalelor transfinite din cea de-a doua clasă de numere.

Această problemă a fost conturată mai precis de A. Church și de S. C. Kleene[44]. Acești doi autori au stabilit următoarele cerințe:

1. Fiecare ordinal ce apare pe parcurs să fie notat cu un singur simbol (primul ordinal este 1).
2. În cazul cînd avem în fața noastră două ordinale notate cu două simboluri diferite, să se poată decide cu ajutorul unui procedeu aritmetic recursiv care dintre cele două este mai mare și care mai mic.
3. Fiind dat un ordinal oarecare, diferit de 1, să se poată stabili dacă acesta are un predecesor imediat sau nu. În primul caz, deci dacă s-a decis că un asemenea predecesor există, se cere ca el să poată fi efectiv determinat. În cel de-al doilea caz, se cere să existe un asemenea procedeu aritmetic recursiv cu ajutorul căruia să se poată defini o succesiune de ordinale în așa fel, încît ordinalul dat să fie tocmai limita acesteia.
4. Fiind dat un ordinal oarecare, se cere să se poată arăta pe o cale constructivă că se poate ajunge pînă acolo prin inducție transfinită.

Din examinarea acestor cerințe se recunoaște imediat că Church și Kleene se situează pe terenul conceptului precis de construcție amintit de noi.

W. Ackermann[45] a aplicat acest punct de vedere în elaborarea constructivă a unui segment al celei de a doua clase de ordinale, un segment considerabil în raport cu

---

[44] A. Church, *The Constructive Second Number Class*, în „Bull. Amer. Math. Soc.", 44, 1938; S. C. Kleene, *On notation for Ordinal Numbers*, în „Journal of Symbolic Logic", 3, 1938.

[45] W. Ackermann, *Konstruktiver Aufbau eines Abschnitts der zweiten Cantorschen Zahlenklasse*, în „Mathematische Zeitschrift", 53, 1951, pp. 408—413. Merită să fie semnalată aici și o încercare anterioară a lui O. Veblen, *Continuous Increasing Functions of Finite and Transfinite Ordinals*, în „Trans. Amer. Math. Soc.", 9, 1908, pp. 280—292, care nu se bazează încă pe conceptul precis modern al construcției.

Scanned with OKEN Scanner

cele ce sînt prezentate de obicei. Din nefericire, nu avem posibilitatea de a prezenta aici procedeul lui Ackermann în amănuntele sale. În încheierea considerațiilor precedente, trebuie să mai insistăm, totuși, asupra importanței pe care o au aceste ordinale transfinite constructibile pentru matematică în general și în mod special pentru cercetările care privesc fundamentele sale. Va fi suficient să spunem doar atîta, că ele își găsesc aplicații în caracterizarea exactă a gradului de complicație al expresiilor logico-matematice (și al unor întregi scheme deductive, procedee constructive). La rîndul ei, o asemenea caracterizare a gradului de complexitate servește unor scopuri metamatematice, în mod special în efectuarea unor demonstrații de consistență. Astfel, de exemplu, Gentzen a reușit să demonstreze pentru prima dată consistența teoriei complete a numerelor; în esență, datorită faptului că a aplicat un procedeu de reducție aritmeticii, reprezentată într-o formă logistică, a putut demonstra caracterul finit al acestuia. Pentru a obține această decisivă demonstrație de finititudine, el a asociat fiecărei construcții aritmetice un număr de ordine, avînd grijă ca după fiecare pas al procedeului de reducție, acest ordinal să se micșoreze. Din moment ce se poate întîmpla însă ca un asemenea procedeu constructiv să depășească în complexitate o infinitate de alte construcții (lanțuri deductive), sînt necesare ordinale transfinite și totalitatea lor poate fi concepută pe cale inductivă numai cu ajutorul unei inducții transfinite.

Gentzen[46] a avut nevoie, așadar, de ordinale transfinite constructibile și, în efectuarea demonstrației sale, el s-a putut mulțumi cu ordinalele din cea de-a doua clasă cantoriană, pînă la „primul număr epsilon". Pentru efectuarea unor demonstrații de consistență privind analiza sau chiar teoria mulțimilor, este nevoie să se recurgă la segmente mult mai cuprinzătoare ale celei de-a doua clase de ordinale; acestea ne-au fost puse la dispoziție tocmai de cercetările lui Ackermann.

Am ajuns astfel la sfîrșitul acestei secțiuni. În restrîngerea conceptului de constructibilitate matematică la

[46] Vezi GM, pp. 387—392.

Scanned with OKEN Scanner

mulțimi numărabile sau chiar la mulțimi efectiv enumerabile, o restrîngere care este sau astăzi pare cel puțin necesară[47], zărim, fără îndoială, prezența unei anumite limitări în elaborarea conceptelor matematice. Dar această limită este impusă gîndirii matematice de către ea însăși. Nu s-a întîmplat, așadar, ca gîndirea să se fi lovit de o barieră ridicată în fața ei de o forță suprapusă, înaintea căreia ea ar fi trebuit să se oprească împotriva voinței sale, ci, dimpotrivă, însăși gîndirea este aceea care își impune această limitare.

Cu aceasta am ajuns la sfîrșitul considerațiilor noastre consacrate limitelor *imanente* ce apar în procesul de elaborare a conceptelor matematice. Aceste considerații au fost bazate, în esență, pe procedee matematice interioare. Ne mai rămîne ca în următoarea și ultima secțiune a cărții noastre să conturăm problema limitelor gîndirii matematice în general, sub aspectul său filozofic.

B. PROBLEMA FILOZOFICĂ A LIMITELOR GÎNDIRII MATEMATICE

1

Problema principială a limitelor gîndirii matematice nu a apărut încă sub aspectul său general în antichitate, deși opoziția dintre concepția lui Platon și cea a lui Aristotel în privința naturii matematicii (despre care am mai avut ocazia să vorbim) și-a păstrat pînă în zilele noastre importanța ei fundamentală. Pentru că ceea ce este astăzi numit „platonism“ (mai exact, „realism platonician“) și „nominalism“ (mai precis, „conceptualism“), ambele aceste tendințe își au originea în amintita controversă din antichitate. În orice caz, concepția aristotelică cu

[47] Nu mi se pare chiar atît de cert precum se crede, de obicei, faptul că această barieră nu va putea fi, totuși, depășită în viitor.

Scanned with OKEN Scanner

privire la apariția configurațiilor matematice prin intermediul „abstracției" *(aphairesis)* poate fi considerată ca un prim punct de pornire pentru problema privind limitele matematicii. Într-adevăr, după Aristotel, matematica este făcută de oameni și nu are o origine divină (metafizică), ca în viziunea lui Platon. Teoria abstracției leagă matematica de corpul fizic, chiar dacă acest corp apare într-o formă idealizată și chiar dacă este luat în considerare și ceea ce este „comun" configurațiilor matematice, cum sînt, de exemplu, proporțiile. În această concepție aristotelică nu poate fi pierdută din vedere prezența unui element „subiectiv", oricît de ciudat ar părea aceasta în cadrul concepției antice despre lume. Pentru existența matematică, omul apare aici ca un element esențial[48].

Dar problema limitelor gîndirii matematice apare în mod explicit abia în cadrul filozofiei moderne. Desigur în epoca raționalismului propriu-zis, epocă caracterizată, și nu fără temei, prin predominanța ideii de *Mathesis universalis*, nimeni nu s-a gîndit încă să impună bariere dominației matematice, care și-a făcut recent și cu atîta forță apariția. Nici Descartes, nici Leibniz nu cunosc vreo limită ce ar sta în mod intenționat în fața acestei *mathesis*, numită de ei „*universalis*". Pentru Leibniz numărul reprezintă o formă metafizică fundamentală, care intră în mod esențial în determinarea structurii universului. La el apare aritmetica în rolul principal, care ocupă acum primul plan într-un mod cu totul diferit ca la Descartes. În esență, la Leibniz devine eficientă ideea unei matematici formal-abstracte care depășește cu mult, din punct de vedere principial, geometria clasică.

O dată cu Kant apare o remarcabilă întorsătură, legată de o orientare către punctul de vedere criticist, pe tărîmul întregului domeniu al gîndirii filozofice. Întrebările cu privire la limitele cunoașterii umane în general își aruncă umbra asupra întregii critici a rațiunii (teoretice). Și în mijlocul acestei uriașe și decisive transformări în orientarea gîndirii filozofice, apare și o modalitate diferită de

[48] Acest punct de vedere devine eficient și în unele observații în cadrul tratării conceptului de infinit (*Fizica*, III, 4—8).

Scanned with OKEN Scanner

a concepe matematica. În timp ce pentru Leibniz omu este, ca orice monadă, o oglindă *creatoare* a universulu și, fiind o imagine a lui Dumnezeu, participă prin aceasta la forța creatoare a divinității, Kant introduce o distincție precisă între divinul *intellectus archetypus* și *intuitus originarius*, cărora le opune un *intellectus ectypus* și un *intuitus derivativus* aparținînd ființei umane. Posibilitatea de cunoaștere a omului posedă, conform concepției lui Kant, două ramuri distincte și separate: intuiția senzorială și intelectul, însă ambele provin dintr-o sursă unică, necunoscută nouă. Obiectele ne sînt furnizate de percepția senzorială, o capacitate pur receptivă, fiind apoi gîndite prin intermediul intelectului dotat cu spontaneitate, dar mereu în dependență de intuiție. Pentru că noțiunile fără intuiție rămîn goale, și, desigur, și intuiția fără noțiune rămîne oarbă.

Astfel, și cunoașterea matematică este nevoită să recurgă la intuiții. Ea nu poate fi numai pur intelectuală. Desigur, ea nu se bazează pe observația empirică, ci se referă doar la formele pure ale sensibilității: spațiul și timpul, prezente în cele două ramuri principale: geometrie și aritmetică (cărora algebra și analiza le aparțin, ca științe secunde). De mare importanță este în primul rînd fundarea aritmeticii pe intuiție, mai precis pe schema succesiunii temporale.

Matematicienii din epoca premergătoare intuiționismului au putut privi filozofia kantiană ca ceva ininteligibil și lipsit de importanță. Situația s-a schimbat însă de cînd au apărut intuiționismul lui Brouwer, aritmetica recursivă a lui Skolem și alte idei înrudite cu acestea. Și Hilbert se referă în considerațiile sale metamatematice la Kant.

Privită însă dintr-un punct de vedere principial, teoria kantiană a matematicii are semnificația fixării unor limite. Timpul constituie, precum am văzut, forma unei intuiții interioare, adică o capacitate cognitivă specific umană, care nu-i este proprie oricărei ființe dotate cu inteligibilitate. Despre modalitatea cunoașterii la alte ființe nu știm nimic. Cunoașterea noastră teoretică se limitează la universul fenomenelor; orice cunoaștere a obiectului, așa cum este acesta în sine, ne este nouă,

Scanned with OKEN Scanner

oamenilor, inaccesibilă. Rezultă de aici că matematica, chiar şi în formele ei cele mai abstracte, este în dependenţă de capacitatea cognitivă specifică a omului, în mod special de acea formă pură a intuiţiei care este „timpul". Dar, chiar şi matematica se referă numai la lumea aşa cum ea apare în faţa noastră şi nicidecum la lumea aşa cum este ea în sine, în ochii lui Dumnezeu. Aici stăm deci — în măsura în care sîntem de acord cu Kant (în perioada filozofiei sale critice) — în faţa unor limite absolute care îngrădesc cunoaşterea umană.

Dar cum îşi manifestă aceste limite efectele? Răspunsul diferă după cum considerăm matematica sau fizica teoretică. În cel din urmă caz, intră în joc, precum am mai văzut, în mod special geometria. În această privinţă Kant susţine în *Critica raţiunii pure* (1781) valabilitatea spaţiului euclidian pentru orice teorie fizică, şi dacă el însuşi nici nu s-a întîlnit cu geometria neeuclidiană, mai tîrziu (1825) F. A. Taurinus şi-a bazat apărarea tezei asupra valabilităţii geometriei euclidiene în spaţiul cosmic pe teoria kantiană a spaţiului ca formă intuitivă a sensibilităţii exterioare. Încă înaintea apariţiei filozofiei critice a scris Kant în disertaţia sa, *De mundi sensibilis atque intelligibilis forma ac principiis* (1770), următoarele cuvinte remarcabile (§ 15, E): „*Leges sensualitatis erunt leges naturae quatenus in sensus cadere potest*". Prin acestea se introduce însă o limitare în privinţa valabilităţii legilor intuiţiei sensibile (adică a geometriei euclidiene) în fenomenele naturii, în măsura în care acestea sînt accesibile simţurilor. Aceasta deschide posibilitatea (o posibilitate de care, desigur, Kant nu a devenit niciodată conştient) ca natura, în măsura în care *nu* este accesibilă simţurilor, să se supună unor alte legi de structură. Şi dacă acum, în fizica modernă, în teoria generală a relativităţii, în teoria cuantelor sînt efectiv aplicate alte structuri spaţio-temporale şi alte legi cinematice decît în domeniul fizicii clasice, atunci această transformare se datorează faptului că, în comparaţie cu unităţile de măsură ale vieţii cotidiene, am pătruns în domeniile dimensiunilor uriaşe ale spaţiului cosmic, accesibile numai pe cale astronomică, respectiv în dimensiunile infime ale lumii atomice şi nucleare. Or, aceste configuraţii

Scanned with OKEN Scanner

extrem de mari și extrem de mici nu sînt accesibile simțurilor noastre. Am putea, așadar, ușor cădea de acord cu o filozofie kantiană, mai liber concepută[49].

Dar esența propriu-zisă a chestiunii nu se află aici. Punctul central al problemei trebuie căutat dincolo de geometrie, pe tărîmul matematicii formal-abstracte, în aritmetică, în analiză și în teoria mulțimilor. Trebuie să punem, așadar, întrebarea: în ce măsură va fi această matematică formalizată a zilelor noastre atinsă sau vătămată de limitele indicate de Kant, în măsura, desigur, în care acceptăm că acestea există într-adevăr? În această privință, Brouwer s-a exprimat într-o ocazie, într-un sens care ar putea fi interpretat ca stabilirea unui principiu de „neutralitate" a matematicii. Conform cuvintelor lui Brouwer, matematica se bazează pe operații care sînt independente pe de o parte de limbaj, pe de altă parte de „obiectele" la care se referă. Cu alte cuvinte, este cu totul indiferent dacă aceste obiecte sînt „lucruri în sine" sau „fenomene" (în sensul lui Kant), dacă, în general, ele sînt obiecte pasive sau simple acte.

Respectul strict al kantianismului ne poate duce la o atitudine care să nege cu totul posibilitatea de a aplica noțiunea de număr asupra „lucrului în sine". Încă Schopenhauer a insistat, la vremea sa, asupra lipsei totale de semnificație a distincției dintre noțiunile de singular și plural aplicate „lucrului" sau „lucrurilor". Dar matematicianul formalist nu este atins de toate aceste distincții, pentru simplul motiv că substratul operațiilor sale îi este indiferent.

Astfel, acest șir de considerații se sfîrșește pînă la urmă în vid, iar matematica pare să se fi salvat și din strînsoarea critică a filozofului.

2

Totuși, în ideea filozofică de bază a lui Kant se mai află ascunsă o idee cu consecințe mai profunde, și anume

[49] Am expus mai pe larg această idee în lucrarea mea *Die aprioriische Struktur des Anschauungsraumes*, în „Philosophischer Anzeiger", IV, 1930, pp. 129—162.

Scanned with OKEN Scanner

ideea caracterului finit al ființei umane. Desigur, această trăsătură fundamentală a naturii umane nu a fost pusă la îndoială nici de alți gînditori ai evului modern, cum a fost, bunăoară, Descartes sau Leibniz. La Descartes această idee joacă un rol important în demonstrația existenței lui Dumnezeu, dată de el în cea de-a treia *Meditație*, în 1641, și la rîndul său, și Leibniz face o distincție între divinul *Monas Monadum* și celelalte monade, dintre care fiecare oglindește lumea numai într-un mod imperfect. Totuși, la Leibniz apare și în acest domeniu legea continuității, care stabilește existența ideală a unei succesiuni continue de monade, de la cele mai inferioare pînă la cele superioare. Abia la Kant apare însă pentru prima dată ideea finitudinii omului, gîndită cu toată rigoarea și cu acceptarea consecințelor radicale pe care le aduce cu sine.

Am amintit mai sus de cele două ramuri ale cunoașterii umane: sensibilitatea receptivă și intelectul spontan. În această receptivitate a intuiției senzoriale vede Kant manifestîndu-se cu precădere finitudinea ființei umane. El vede manifestîndu-se această limitare în incapacitatea omului de a crea lucruri. Iar intelectul nostru nu are un caracter „contemplativ" în sensul unei contemplații intuitive (ca cea divină), ci trebuie să pornească de la datele pe care i le oferă simțurile; pentru că noțiunile fără intuiție rămîn goale. Conceptele pure pot da naștere doar unor judecăți „analitice", care nu fac decît să descompună datul confuz și prin aceasta să-l expliciteze. Abia judecățile „sintetice" contribuie cu un spor real la îmbogățirea cunoștințelor noastre. Or, acestea sînt sau de proveniență empirică, sau — ca cele matematice — sînt produse de cele două forme ale intuiției pure, spațiul și timpul.

Dar ce semnificație au toate acestea pentru problema caracterului finit al ființei umane? Și, înainte de toate, ce semnificație poartă acestea în privința structurii intime a matematicii, care pînă la urmă este, totuși, o creație a spiritului uman?

Într-adevăr, matematica (și acest fapt este adesea foarte ușor scăpat din vedere) este o știință umană, la fel ca toate celelalte științe. Acest fapt este atît de ușor scăpat din vedere, deoarece matematica nu depinde de observații cu caracter empiric și dă impresia de parcă ar emerge

Scanned with OKEN Scanner

din forțele autocreatoare ale spiritului uman. Astfel, Gauss a văzut în conceptul de număr „un produs pur al spiritului nostru", iar Dedekind a definit numerele drept „creații libere ale spiritului nostru"[50]. După Kant, toate acestea nu sînt decît simple iluzii; conceptul de număr depinde de timp — o formă apriori dată intuiției noastre, iar această intuiție reprezintă o capacitate receptivă și în nici un caz creatoare.

Astăzi, în lumina „analizei existențiale" a lui Heidegger, ne simțim obligați să mergem și mai departe. Timpul trebuie considerat nu numai ca o simplă formă a sensibilității interioare, ci ca însăși structura fundamentală a ființării umane în general. Ca oameni, sîntem ființe esențialmente temporale. Însăși existența noastră poate fi caracterizată ca temporalitate. Timpul nu este o simplă formă care ne învăluie, ci el ne pătrunde, îmbibînd existența noastră în detalii și în ansamblu.

Acest caracter temporal al ființei umane se manifestă și în domeniul matematicii, deși se trece adesea cu vederea prezența lui. Temporalitatea și caracterul finit al ființei umane, strîns legat de aceasta, nu se manifestă într-o limitare sau poate chiar într-o împiedicare a gîndirii matematice; dimpotrivă, funcționarea ei devine posibilă abia datorită temporalității. Noi cunoaștem și sîntem nevoiți de a număra și de a calcula pentru că sîntem ființe temporale și finite. O ființă eternă și infinită nu numără. Pentru o asemenea ființă, activitatea de numărare și de calcul nu ar avea absolut nici un sens[51].

Din antichitate (din școala lui Platon, după o informație a lui Plutarh, *Quest. conviv.*, III, 2) ni s-a păstrat o vorbă cunoscută: Dumnezeu face mereu geometrie. Gauss,

---

[50] Cu privire la Gauss, vezi GM, p. 179; cu privire la Dedekind, GM, pp. 233, 244 (scrisoare către H. Weber, din 24 ianuarie 1888): numerele reprezintă „ceva nou, creat de spirit. Sîntem de specie divină și dispunem, fără îndoială, de o forță creatoare nu numai în domeniul obiectelor materiale (căi ferate, telegrafie), ci în mod cu totul special în domeniul spiritual".

[51] Dumnezeu nu poate fi conceput, cel puțin într-un mod consecvent, ca o ființă care numără și calculează, în ciuda cuvintelor binecunoscute ale lui Leibniz: „*Dum Deus calculat ..., fit mundus*" (Atunci Dumnezeu a calculat ..., și astfel a făcut lumea).

Scanned with OKEN Scanner

marele cultivator al teoriei numerelor, a variat această maximă în sensul că Dumnezeu face mereu aritmetică. Adevărul este însă că numai omul poate fi aritmetician sau geometru. Ființa divină stă deasupra timpului și cuprinde într-o singură privire tot ceea ce nouă ni se pare ca având o extindere interminabilă în timp, precum apare în expunerea profundă a lui Plotin[52]. Acea *infallibilis visio Dei* nu parcurge o succesiune potențial infinită, ca noi în gîndirea noastră matematică, ci ea se află dintr-o dată la capătul ei. Aici apare totodată cum concepția infinitului, ca o potențialitate, se raportează, începînd cu Aristotel, la ființa umană, la fel precum și teoria abstracției, elaborată de Stagirit, plasează matematica într-o dependență antropologică. Și mai puțin se poate trece cu vederea că și constructivismul recursiv al matematicii actuale se plasează în aceeași perspectivă de idei.

Ajungem astfel la următorul rezultat: în măsura în care matematica (imediat ce depășește problemele cu totul primitive) își propune ca scop principal dominarea infinitului, ea este raportată în totalitatea principiilor și esențelor sale la caracterul finit al ființei umane. Căci numai pentru o ființă finită are un rost să gîndească la stăpînirea infinitului.

La acestea mai trebuie să adăugăm însă ceva. Într-o lucrare din tinerețe, *Philosophie der Arithmetik*[53], E. Husserl a spus următoarele: „Este de neconceput ideea că o extindere de orice natură a capacității noastre de cunoaștere ar putea să-i confere acesteia posibilitatea de a-și reprezenta sau de a epuiza pe o cale intuitivă aceste mulțimi (infinite). În această privință însăși capacitatea forței noastre de idealizare se lovește de o barieră". Într-adevăr, nici chiar o capacitate cognitivă idealizată, de care ar dispune, bunăoară, un geniu conceput ca o „noțiune gnoseologică limită"[54], nu ar fi în stare să decidă dacă

---

[52] *Ennead.*, III, 7, *Despre eternitate și timp.*

[53] Halle a. S. 1891, p. 247. Vezi și pp. 211—216, 218, 240 și urm., 244—250.

[54] În unele din considerațiile sale, Husserl a conceput ființa divină ca o „noțiune gnoseologică limită"; această concepție nu corespunde însă noțiunii ființei divine din metafizica modernă, pe care o avem în vedere în analiza noastră prezentă.

Scanned with OKEN Scanner

toate numerele pare pot fi reprezentate ca sumă a două numere prime diferite (conform conjecturii lui Goldbach) sau dacă, dimpotrivă, există o excepție de la această regulă. Și nici chiar un matematician dotat cu o viață de o longevitate infinită nu ar fi în stare să decidă această problemă prin parcurgerea succesivă a „întregului" șir de numere, pentru că nici el nu ar putea ajunge vreodată la sfîrșitul acestuia. Din nou iese aici la suprafață caracterul „antropologic" și „temporal" al conceptului aristotelic al infinitului potențial.

Dar matematicianul uman mai diferă și în altă privință de geniul matematic. Există, bunăoară în domeniul fizicii, un mare număr de probleme care ar putea fi „în sine" rezolvate, dacă ar putea fi stăpînită uriașa cantitate de muncă calculatorie pe care o cere obținerea unei soluții. Dar chiar și în domeniul matematicii pure joacă un rol important această limitare[55]. Instalațiile moderne de calcul pot veni în unele cazuri în ajutorul nostru. Rămîne însă un fapt stabilit că capacitățile umane se dovedesc a fi și pe tărîm matematic nu numai finite, dar chiar „reduse": ele rămîn mereu sub o anumită limită. Acest aspect joacă și el, la rîndul său, un rol important în tehnica de gîndire matematică. Metodele de soluție trebuie alese în așa fel, încît operațiile de calcul necesare soluțiilor să rămînă în interiorul acestui domeniu uman „redus".

Putem acum conchide considerațiile noastre cu următoarele: caracterul finit al ființei umane este foarte strîns legat de structura matematicii. El constituie însă condiția datorită căreia matematica devine posibilă ca atare. Aceasta înseamnă că matematica este și ea o treabă umană, într-o măsură nu mai mică decît orice altă știință (făcînd aici, desigur, abstracție de ființe ipotetice antropoidale extraterestre). Nici Dumnezeu și nici animalele nu pot face matematică, ci numai ființa intermediară: omul.

---

[55] Vezi D. Hilbert, *Axiomatisches Denken*, în „Mathematische Annalen", 78, și O. Becker, *Mathematische Existennz*, p. 332.

Scanned with OKEN Scanner

În baza celor precedente, pare că nu poate fi vorba de vreo limită în domeniul gîndirii matematice. Toate încercările noastre de pînă acum, îndreptate spre identificarea unei asemenea bariere, au eșuat. Cu toate acestea, nimeni nu ar fi de acord cu noi dacă am susține cu seriozitate că modul de gîndire matematic ar fi atotcuprinzător. Se va obiecta, înainte de toate, că în căutarea acestor limite am omis să luăm în considerație un domeniu care se află în imediata noastră apropiere și anume tocmai a doua parte a universului nostru intelectual, științele umanistice — un domeniu uriaș, care posedă aceleași drepturi de a fi luat în considerare ca și domeniul științelor naturii. În aceste domenii științifice, modul de gîndire matematic nu și-ar putea găsi în mod evident nici un teren de aplicație (făcînd abstracție de cazuri cu totul speciale, ca statistica lingvistică, cercetarea comunicației intelectuale etc.). Dar s-a mers și mai departe. Heidegger a lansat odată butada că matematica nu este de loc mai *strînsă**, ci doar mai *strîmtă (nicht strenger sondern nur enger)* ca istoria sau filozofia. În spatele acestei observații ironice se ascunde un substrat serios. Tot ceea ce poate fi cuprins cu ajutorul gîndirii matematice rămîne într-o privință la marginea universului lucrurilor cognoscibile, închis într-un domeniu „strîmt". Problema centrală și proprie a cunoașterii în general, esența acelei: „despre ce este vorba", are un caracter cu totul nematematic. Gîndirea matematică intră într-o totală confuzie în fața „sensului valorii" fenomenelor, este complet indiferentă față de conținutul lor (pe care îl privește numai sub aspectul său substanțial) și lasă în afara vederii — pe cît e posibil — sensul efectiv. Și dacă aceasta nu-i reușește pe deplin, vina o poartă pentru aceasta dependența indestructibilă, chiar și a activității matematice, de finitudinea ființei umane. Matematicianul trebuie să plătească izolarea sa distinsă în fața sensurilor valorice, „neutralitatea" sa, cu o sărăcire a „existenței" sale. El rămîne străin în fața existenței vii.

---

* În sensul rigorii. — *N.T.*

Scanned with OKEN Scanner

Exprimat într-o manieră mai tradițională, putem spune: matematica este incapabilă să „înțeleagă" lucrurile ca atare; și nici măcar nu este în stare să le „explice". Ea nu este în stare decît să le „stăpînească". Opoziția dintre înțelegere și explicare a fost scoasă în evidență în mod special de Max Weber și Karl Jaspers, care s-au servit de ea ca de un fundament metodologic. (Această distincție a fost introdusă de ei pe de o parte sub influența deosebirii existente între științele naturii, cu caracter „nomotetic", și științele spirituale, cu caracter „ideografic", distincție care provine de la Wilhelm Windelband. Pe de altă parte, ea se află și sub influența concepției lui Dilthey, care a introdus distincția unei psihologii a înțelegerii față de una a analiticității). Nu este posibil și nici nu ar fi locul să intrăm aici în amănuntele problemei cuprinzătoare a înțelegerii în domeniul științelor spirituale (umanistice) — problemă căreia E. Rothacker și școala sa îi acordă în zilele noastre o atenție deosebită. Vrem să scoatem în evidență doar faptul că în acest cerc de probleme se cercetează interdependența dintre motivare și acțiune. Actul motivării poate fi înțeles însă numai prin intermediul unei retrăiri interioare, al unei substituții sprituale în modul de acțiune al unui om despre care tratează, de exemplu, un istoric. Foarte clar apar acestea la analiza motivației care stă la baza acțiunilor unui om de stat sau ale unui conducător de oști, unde analiza se cere a fi efectuată în descrierea unui important eveniment politic sau militar. Dar și intenția artistică a unui stil artistic determinat sau incarnarea sa într-o operă artistică determinată îl așază pe istoricul artei în fața problemei de a înțelege motivele acestora. Analog stau lucrurile și în problema relației dintre trăire și poezie. Din aceste puține exemple — și care nu puteau fi decît amintite — scoase dintr-un domeniu de necuprins, rezultă totuși cu claritate că analiza matematică, bunăoară a unui proces de mișcare (analiza făcută de Galilei mișcării unui proiectil, analiza newtoniană a mișcării planetelor), este cu totul altceva.

Desigur, în ambele cazuri este vorba în fond de o „analiză", o descompunere a unui eveniment în elementele sale componente. Conducătorul de oști sau omul de stat,

Scanned with OKEN Scanner

din exemplul de mai sus, acționează întotdeauna sub impulsul unui mare număr de motive, care se împletesc, iar istoricul care interpretează evenimentele trebuie să le decanteze și să aprecieze efectele lor stimulatoare sau prohibitive. Așa se întîmplă și în cazul lui Galilei și Newton în analiza forțelor mecanice care determină mișcarea după direcție, sens și intensitate, forțe care se compun conform legilor de însumare a mărimilor vectoriale.

Dar aici apare deja o deosebire fundamentală. Mărimea și direcția unui vector sînt concepte care pot fi determinate precis și univoc în raport cu un sistem determinat de măsuri și de referințe, iar legea compunerii vectorilor este de asemenea precis determinată și ușor de mînuit. Dificultatea problemei constă numai în descompunerea *în gînd* a cauzei de ansamblu, care a provocat apariția fenomenului cercetat, în asemenea elemente componente ce pot fi considerate drept cunoscute în baza cunoașterii unor procese elementare determinate.

Cele spuse pot fi ilustrate cel mai bine pe exemplul analizei făcute de Galilei mișcării unui proiectil. Mișcarea proiectilului este concepută de Galilei ca fiind compusă dintr-o mișcare inerțială rectiliniară și uniformă (a cărei viteză este determinată atît în privința direcției, cît și a mărimii prin impulsul inițial ce i s-a imprimat), precum și dintr-o mișcare determinată de căderea liberă a corpului. Cauza acesteia din urmă este forța gravitațională, însăși căderea liberă fiind o mișcare uniform accelerată. Din moment ce prima componentă a mișcării crește liniar, a doua pătratic în funcție de timp, traiectoria rezultantă va avea forma unei parabole.

În cazul analizei motivării efectuate de un istoric nu mai dispunem de fenomene elementare atît de clar determinate și nici de procedee de compoziție atît de schematice. Istoricul dispune de anumite cunoștințe cu privire la mobilurile elementare, precum și la interacțiunile acestora din propria sa experiență de viață, care ne este, în esență, ca tip, cunoscută și nouă. Această experiență nu cuprinde numai elementele obținute de el, personal, cele trăite de el — evenimente care depind de o serie de factori aleatorii — ci conține și ceva „obiectiv-spiritual", precipitatul cristalizat al unui mare număr de oa-

Scanned with OKEN Scanner

meni din prezent și din trecut pe tărîmul literaturii, al dreptului, al religiei și din alte domenii. În general, credem a ști cum se comportă oamenii (de felul nostru) în situații tipice, dar această „știință" nu este dedusă dintr-un sistem de axiome inițial acceptate în virtutea „evidenței" sau pentru că, pur și simplu, vrem să le acceptăm ca pe niște „convenții arbitrare", ci constituie o modalitate intuitivă de a cunoaște unele fenomene ce ni se par inteligibile printr-un sentiment interior. Nu trebuie să uităm că deși istoricul este primul „om de știință a spiritului", poetul epic îl precedă totuși, pentru că el a fost primul care a povestit și a interpretat destinul uman. Homer a fost înaintea lui Herodot.

Să ne oprim aici, la aceste observații fugare, care — precum prea bine știe orice cunoscător al problemei — au putut atinge doar suprafața fenomenului. Ne interesează doar un singur aspect al acestor considerații. Analiza fenomenelor care constituie obiectul științelor spiritului este, din punctul de vedere al matematicianului, cu totul lipsită de „exactitate", fiind în aparență complet la dispoziția intuiției cercetătorului individual, o intuiție a cărei „evidență" se bazează pe un simplu sentiment. Totuși, elementele componente, precum și însuși modul de compunere a acestora au un caracter inteligibil care iradiază într-un mod particular din interior înspre exterior. Analiza matematică este, fără îndoială, exactă în combinarea elementelor sale date, operațiile sale sînt precis prescrise și legile care le dirijează sînt „demonstrabile". Dar, se pune întrebarea: demonstrabile din ce?

Pentru a putea demonstra ceva, altceva trebuie să fie acceptat din capul locului. Dar cum pot fi asigurate aceste presupuneri inițiale și, mai mult, cum poate fi demonstrat „adevărul" acestora? În geometria antică, de exemplu la Euclid, axiomele și postulatele sînt acceptate din cauza evidenței, iar evidența întregului sistem al geometriei a fost fundată pe evidența propozițiilor primitive, ca pe o bază solidă. Dar am arătat amănunțit în cele precedente că în decursul evoluției istorice, această „stare de inocență" s-a risipit în întregime. Propozițiile fundamentale puse ca axiome la baza geometriei și a mecanicii nu mai apar în fața noastră sub forma unor

Scanned with OKEN Scanner

aserțiuni dotate cu evidență[56], și nici măcar ca perfect „inteligibile".

Există cel puțin un caz, și anume cel al mecanicii, în care cele de mai sus pot fi ușor demonstrate. Astăzi ni se pare un fapt aproape evident că forțele mecanice care acționează asupra unui mobil sînt proporționale cu accelerația (și nu cu viteza) și că, în consecință, o mișcare uniformă și rectiliniară trebuie privită ca lipsită de acțiunea unor forțe exterioare. Dar istoria mecanicii ne învață că în trecut situația a fost tocmai opusă celei actuale. Aristotel, bunăoară (și întreaga antichitate), a fost de părere că forța este proporțională cu viteza, precum ne sugerează, de altfel, și experiența brută a observațiilor cotidiene (cu cît mai repede aleargă cineva, cu atît trebuie să depună un efort mai mare). A durat aproape 2 000 de ani pînă cînd concepția antică a putut fi înlocuită cu legile mecanicii, numită astăzi „clasică"[57]. Nu poate fi vorba, așadar, de o evidență propriu-zisă a legilor fundamentale care stau la baza mecanicii.

Această constatare este, desigur, valabilă chiar în cazul mecanicii clasice. Dar, evident, într-o măsură incomparabil mai mare este ea valabilă pentru fenomenele naturii care se află la o distanță mai mare față de experiențele de toate zilele. Chiar și expresiile utilizate în mecanică: „forță", „inerție", „rezistență", „greutate", „presiune" ș.a. arată că viziunea antropomorfă nu este ușor de eliminat din cadrul acestei științe. În domeniul electrodinamicii lucrurile stau cu totul altfel. Ecuațiile lui

---

[56] Cu toate acestea, constituie, după părerea mea, o problemă serioasă — deși marea majoritate a cercetătorilor moderni refuză să-i acorde vreo importanță — explicarea caracterului de evidență pe care îl posedă geometria euclidiană în spațiul natural al intuiției. Cu privire la acest subiect ne permitem să trimitem cititorul la lucrările noastre: *Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendungen*, în „Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung", hrsg. v. E. Husserl, VI, 1923, p. 385 și urm. (vezi în special pp. 477—497) și *Die apriorische Struktur des Anschauungsraums*, în „Philosophischer Anzeiger", IV, 1930, pp. 129—162.

[57] Cu privire la lupta spirituală care a dus la această transformare radicală a intuiției, trimitem cititorul la magistrala expunere a lui E. J. Dijksterhuis, făcută în cartea sa *Die Mechanisierung des Weltbildes*.

Scanned with OKEN Scanner

Maxwell, care domină întreaga electrostatică și electrodinamică (premergătoare epocii electronicii), nu mai sînt accesibile și inteligibile din punctul de vedere al intuiției naive, cum este cazul, bunăoară, într-o oarecare măsură, cu legea inerției. Justificarea acceptării acestor ecuații trebuie căutată în fertilitatea lor, deci în faptul că acceptarea lor permite obținerea pe o cale pur deductivă a tuturor fenomenelor electrice (cel puțin în măsura în care teoria continuului își păstrează valabilitatea), iar „frumusețea" și structura lor simetrică au ieșit în evidență în mod deosebit după întregirea lor de către H. Hertz.

Aceste exemple ne permit ca, prin analogie, să înțelegem ce semnificație au aici termenii de „a înțelege", „a explica" și „a stăpîni". Despre sensul înțelegerii am avut deja ocazia să vorbim. Dar ce semnificație are termenul „a explica"? În ce măsură este mișcarea proiectilului „explicată" (pentru a ne referi la exemplul nostru vechi) prin faptul că este concepută prin compunerea unei mișcări inerțiale rectiliniare și uniforme și a unei căderi libere uniform accelerate? Cu ajutorul „analizei", această mișcare complexă este redusă la anumite fenomene cunoscute și, desigur, la ceva ce este deja „explicat". Reducerea are loc într-o manieră „exactă", într-o formă străvezie și clară. Într-adevăr, aici totul apare „clar" și pe deplin „clarificat". Dar cum stăm, totuși, cu elementarul dat și cunoscut, în cazul exemplului citat cu privire la mișcarea inerțială și căderea liberă? Aceste mișcări elementare sînt „ușor inteligibile", în sensul că ele sînt ușor accesibile intuiției și pot fi aduse la forme simple. Dar privite din interior, ele nu sînt totuși inteligibile în sensul adevărat al cuvîntului. Și cu atît mai puțin putem spune că ele ar fi dotate cu o necesitate în sine. Istoria mecanicii ne arată că pot fi foarte bine gîndite și alte forme elementare de mișcare. Ne ciocnim aici, așadar, de o limită a modului de cunoaștere care tinde să dea „explicații" pentru fenomenele pe care le descrie. Acest fel de cunoaștere nu oferă acea înțelegere prin intermediul trăirii interioare a substituției spirituale care, în anumite cazuri favorabile, este totuși posibilă în domeniile pe care le studiază științele

Scanned with OKEN Scanner

spiritului. În această privință, ne lovim de un specific caracter străin, de o specifică alterietate a naturii anorganice; dar tocmai prin recunoașterea acestui fapt am și dobîndit o dată esențială pentru cunoaștere.

O anumită obișnuință face totuși posibilă o mijlocire a cunoașterii explicative cu natura „străină". De atîtea ori am văzut corpuri în cădere liberă, încît nici nu mai sesizăm caracterul extraordinar al acestui fenomen cotidian. Fenomenul căderii libere constituie în ochii noștri un proces „natural", firesc și evident, dar această „evidență" nu este, totuși, în mod paradoxal echivalentă cu inteligibilitatea fenomenului.

La acest punct devine sensibilă deosebirea dintre „explicație" și „stăpînire". Ecuațiile lui Maxwell, amintite mai sus, nu reduc fenomenele electromagnetice la fenomene elementare „evidente". În domeniul electromagnetismului nu au existat fenomene cotidiene cu care să ne fi fost obișnuit, chiar dacă nu le-am fi înțeles. Pe acest tărîm totul a fost în întregime nou și necunoscut și a trebuit să fie studiat prin cercetări sistematice, elementare și totuși nebanale. Va fi suficient să ne aducem aminte doar de experiențele fundamentale ale lui Faraday. În aceste cazuri nu poate fi vorba decît de stăpînirea unor fapte experimental stabilite cu ajutorul unor reguli, legi și formule și în nici un caz nu de o „explicare" a acestora. Acest nou punct de vedere se realizează apoi într-o formă extremă în cazul mecanicii cuantice din zilele noastre, unde fiecare nou pas a dus la fenomene surprinzătoare și inexplicabile (și *a fortiori* ininteligibile), a căror stăpînire nu poate reuși decît prin intermediul unor construcții conceptuale neobișnuite și de o rezonanță paradoxală. Va fi suficient să ne gîndim, cu această ocazie, la „dualitatea" corpuscul-undă.

Pătrunzînd în aceste domenii, ne lovește dintr-o dată, într-un grad și mai înalt ca înainte, caracterul străin, alterietatea naturii în comparație cu propria noastră ființă. Și gradul și intensitatea acestui sentiment de alterietate par să crească pe măsură ce ne îndepărtăm de unitățile de măsură ale vieții de toate zilele. Dar tocmai aici vine matematica în ajutorul nostru, și anume modalitatea abstract-formală a existenței sale care nu mai

Scanned with OKEN Scanner

are nevoie de nici un element intuitiv. În mecanica cuantică, de exemplu, conceptul „spațiului“ Hilbert, cu un număr infinit de dimensiuni, introduce claritate în tratarea problemelor, la fel cum s-a întîmplat în cazul teoriei relativității, unde „continuul-spațio-temporal“ cvadridimensional al lui Minkowski a jucat același rol fundamental. Gîndirea matematică nu intră în impas nici în acest domeniu. Dimpotrivă, ea constituie unica metodă care mai rămîne utilizabilă în aceste explorări. Ține de natura ei, desigur, faptul că ea nu este în stare să înțeleagă nimic, în sensul în care istoricul sau filologul vrea să înțeleagă și chiar înțelege realmente în anumite cazuri favorabile. De asemenea, ea nu este în stare nici să „explice“ mereu orice în sensul unei reduceri la ceva evident, la ceva ce „se înțelege de la sine“. Putem spune că în această privință, matematica se ciocnește aici de anumite bariere care țin de însăși natura ei intimă. Totuși, ea poate obține o stăpînire efectivă a unui domeniu extins de fenomene prin intermediul unor formule dotate cu o specifică structură de simetrie. În această direcție, care-i este proprie și caracteristică, gîndirea matematică nu întîlnește nici un fel de obstacole în înaintarea ei.

Revenim astfel la „gîndirea pitagoreică“ cu care am început cartea de față. Chiar dacă natura situată în afara domeniului uman, sau cel puțin în afara domeniului organic, apare în fața noastră ca „străină“, totuși ea reușește să satisfacă „simțul frumosului“ ce se află în noi, datorită structurii sale cristaline ce se exprimă în multiplele-i „simetrii“. În această privință, natura dezvelește în fața noastră un aspect singular, pe care Plotin l-a numit frumusețea inteligibilă (*to noēton kallos*).

Totuși, aceste considerații, aproape toate, ne duc pînă la urmă la o problemă mai profundă. Acesteia vrem să-i consacrăm ultimul paragraf al lucrării noastre.

4

La începutul lucrării de față ne-am propus să determinăm limitele gîndirii matematice și iată că pînă la sfîrșit am fost duși la concluzia opusă într-o oarecare

Scanned with OKEN Scanner

măsură întrebării noastre inițiale privind imposibilitatea de a înțelege natura și, în consecință, la problema limitelor ce se pun în fața înțelegerii cu caracter istoric. Cel puțin natura anorganică s-a dovedit a fi neinterpretabilă, iar prin aceasta „neistorică". Pentru că tot ce ține de domeniul istoricității este, în esența sa, supus posibilității și necesității de interpretare. Problema noastră s-a schimbat astfel, oarecum, fără voia și intervenția noastră: de la critica gîndirii matematice, ne-am văzut astfel conduși la critica gîndirii istorico-hermeneutice. Și acolo unde modalitatea istorică a gîndirii se lovește de un obstacol de neînvins, tocmai acolo întîlnește gîndirea „străinul", acel ceva ce o înstrăinează. Și tocmai aici întîlnește ea natura specifică, naturalul. Dar tocmai acolo unde procedeul interpretativ, „hermeneutic" eșuează, tocmai acolo vine gîndirea matematică în ajutor, îngăduind ieșirea din impas. Matematica și hermeneutica stau astfel într-o remarcabilă relație de complementaritate. Dacă acceptăm această teză, devine dintr-o dată clar că este tot atît de nejustificat să se reproșeze gîndirii matematice limitarea ei, pe cît este de nedrept să ne plîngem împotriva insuficienței metodei istorico-interpretative în fața fenomenelor naturii.

Gîndirea matematică are alt scop decît gîndirea istorică. Dar fiecare lucru își are claritățile și obscuritățile sale proprii. Ceea ce este clar în natură poate fi cunoscut numai cu ajutorul matematicii. Dar acelora care încearcă s-o cerceteze pe cale hermeneutică, natura le va arăta mereu doar părțile închise, obscure, nestrăvizibile.

Limitele gîndirii matematice nu se află, așadar, în traiectoria avansării sale naturale; ea întîlnește asemenea limite numai în momentul în care este abătută de pe calea sa naturală, fiind îndreptată către lucruri pentru care nu este pregătită. Dar aceste limite nu sînt ale sale proprii. Ele sînt obstacole care aleargă paralel cu drumul ei, pentru a împiedica abaterea ei de la direcția cea dreaptă; ele nu reprezintă deci bariere care ar putea împiedica progresul ei rectiliniar.

Aceste limite și obstacole nu mărginesc, așadar, numai gîndirea matematică — oricît de paradoxal ar suna această afirmație — ci și înțelegerea istorică. Faptul că

Scanned with OKEN Scanner

gîndirea matematică este în stare să-şi însuşească asemenea lucruri şi domenii, care nu sînt „inteligibile“, demonstrează că în realitate există lucruri pe care înţelepciunea tipic hermeneutică nici măcar nu le-ar fi putut visa. Ceea ce se dovedeşte deci a fi realmente limitat este pretenţia „spiritului“ istorico-hermeneutic de a vrea să înţeleagă totul. Din acest punct de vedere văzută, afirmaţia mai sus citată a lui Heidegger, cu privire la caracterul „strîmt“ al matematicii, apare într-o nouă lumină. Nu matematica, ci, dimpotrivă, „istoria“[58] apare acum în ochii noştri ca „strîmtă“, adică limitată în scopurile sale posibile, şi eliberată de pretenţiile ei atotcuprinzătoare.

Domeniul matematicii şi al istoriei se delimitează astfel reciproc. În această privinţă, asistăm aici la o justificare reciprocă simetrică a ambelor modalităţi. Dar într-o altă privinţă, zărim totuşi o deosebire fundamentală între ele: gîndirea matematică este din capul locului lipsită de pretenţia universalităţii. (Nici chiar *Mathesis universalis* a secolului al XVII-lea nu avea asemenea pretenţii.) Tocmai de aceea matematica nici nu rămîne în urma propriilor sale intenţii. Dimpotrivă, gîndirea istorico-hermeneutică se prezintă cu pretenţia totalitară de a înţelege totul, şi tocmai de aceea eşuează mereu acolo unde se ciocneşte de natură.

Mai precis: natura *întîlneşte* privirea uimită, care nu înţelege nimic; ea nu poate fi însă obiectul unei experienţe spirituale de natură istorică şi ea nu este capabilă să participe la o experienţă trăită. Totuşi, într-un anumit sens, ea este „interpretabilă“, şi anume reprezentabilă ca o figură simetrică — desigur, nu ca o figură accesibilă simţurilor, ci ca o formă gîndită (*noēton eidos*), a cărei esenţă pătrunde întreaga matematică. Încercarea de a reprezenta natura ca o „floare“, aşa cum a făcut-o Schelling (în baza unor versuri scrise de Platen), nu

---

[58] Aici, ca şi în toate consideraţiile noastre de faţă, termenul de „istorie“ este locţiitorul întregii ştiinţe hermeneutice din domeniul fenomenelor spirituale, cum şi al filozofiei orientate în sens hermeneutic.

Scanned with OKEN Scanner

este, desigur, decît o eroare romantică, deşi una — trebuie să recunoaştem — de o încîntătoare poezie. A o gîndi însă sub forma unui cristal, aşa cum o fac spiritele cele mai bune ale zilelor noastre, ni se pare însă a ne oferi singura cale a adevărului — o cale iluminată de luminile matematicii.

Un ultim adaos la cele precedente. Omul nu este o „existenţă" (în sens de „fiinţă") pur istorică. El nu este numai „spirit", ci şi „natură" în acelaşi timp. Desigur, acest fapt nu a fost niciodată în întregime trecut cu vederea, dar elementul „natură" este considerat, de obicei, ca substratul instinctiv-animalic al fiinţei umane, deasupra căruia ea se ridică abia după depăşirea şi învingerea acestui element datorită spiritului, spirit care singur este în stare să trăiască şi prin aceasta să înţeleagă istoria şi destinul său propriu. Dar aceasta nu reprezintă încă întregul adevăr. Această schemă a stratificării, oricît de multe lucruri pot fi explicate cu ajutorul ei, nu mai poate satisface exigenţele unei tendinţe mai profunde de a înţelege lucrurile.

Nu este nici posibil şi nu ar fi nici nimerit să intrăm aici în amănuntele problemei care se deschide prin aceasta în faţa noastră. Dar se poate spune de pe acum că existenţa în sine a unei gîndiri matematice constituie un fapt care nu poate fi pus în concordanţă cu concepţia stratificată a fiinţei umane, prezentată mai sus. Pentru că gîndirea matematică leagă între ele raţionalitatea supremă — în principiu — cu lipsa totală a conştiinţei istorice. Urmează deci că omul nu face matematică datorită impulsurilor ce provin din forţele spirituale care îl împing înainte pe calea ascendentă a fiinţării existenţiale, dotată cu o conştiinţă istorică, ci omul face matematică mai curînd datorită legăturilor sale indestructibile cu natura ancestrală, „paraexistenţială"; de aici emană puterea de a descifra secretele naturii tocmai acolo unde ea este ininteligibilă cu ajutorul gîndirii matematice, adică de a le ilumina cu ajutorul luminii „cristaline" — unica ce-i este proprie.

În acest fel, decantarea ponderii existenţiale a istoriei şi a matematicii ne permite să pătrundem mai adînc

Scanned with OKEN Scanner

esența dual ă a ființei umane, sub cele două aspecte ale sale, de ființă care *există* în natură („*Dasein*“) și de ființă de *esență* spirituală („*Dawesen*“)[59]. A intra în amănuntele acestei probleme, însă, ar însemna să depășim cadrele scrierii de față.

---

[59] Vezi lucrarea noastră *Paraexistenz. Menschliches Dasein und Dawesen*, în „Blätter für deutsche Philosophie“, XVII, 1943, pp. 62—95.

Scanned with OKEN Scanner

Tabla de materii

PREFAȚĂ

I

Gîndirea pitagoreică

1. Cei mai vechi matematicieni și filozofi greci..... 7
2. Teza fundamentală a filozofiei pitagoreice: lucrurile sînt numere 10
3. Teoria „pitagoreică" a materiei la Platon..... 13
4. Platon, pitagoreicii și Aristotel despre esența numărului 20

II

Științele naturii

1. Rolul astronomiei 23
2. „Experimentul analitic" în antichitate și în era modernă 27
3. „Sfidarea" naturii? 32
4. *Naturam renuntiando vincimus* 36
5. Problema realității în fizica clasică..... 41
6. Fizica modernă și problema realității..... 49
7. Recapitulare 68

III

Matematica pură, ca știință liberă

1. Începuturile matematicii grecești. Prima apariție a problemei infinitului (Zenon din Eleea) 75
2. Descoperirea iraționalelor 83
3. Teoria aristotelică a infinitului..... 90
4. Teoria aristotelică a abstracției matematice. — *Mathesis universalis* în secolele XVII și XVIII..... 93
5. Matematica — în drum spre o știință formală, secolele XIX și XX 103

Scanned with OKEN Scanner

IV

Limitele gîndirii matematice

A. *Limitele imanente ale matematicii* 109

1. Geometria neeuclidiană. Axiomatica formală..... 109
2. Fundamentarea critică a analizei..... 117
3. Teoria mulţimilor a lui Cantor şi antinomiile. Demonstraţii de consistenţă 120
4. Intuiţionismul 134
5. Calculabilitate şi decidabilitate. Teorema de incompletitudine a lui Gödel 138
6. Introducere în cercul de idei legate de teorema de incompletitudine a lui Gödel 140
7. Conceptul funcţiei calculabile şi probleme adiacente..... 152
8. Definiţia constructivă a numerelor de ordine transfinită . 157

B. *Problema filozofică a limitei gîndirii matematice*.... 163

1. Kant despre esenţa matematicii 163
2. Matematica şi finitudinea omului 167
3. Matematică şi „istorie“ (ştiinţa hermeneutică a spiritului) 172
4. Natura ca „străinul“ omului. Limita inteligibilului. Existenţa şi esenţa omului 179

Scanned with OKEN Scanner

Redactor resp. de carte : AUREL JOLTEA
Tehnoredactor : VICTORIA STĂNCULESCU

Dat la cules 15.02.1968.
Bun de tipar 15.11.1968.
Tiraj 8000 + 140 ex.
Hîrtie pentru tipar înalt tip B de 63 g/m².
Format 50×80/16.
Coli editoriale 10,55.
Coli tipar 11,75. A. 21158/1967.
Indici de clasificare zecimală : pentru bibliotecile mari și mici 51.

Tiparul executat sub comanda nr. 1223 la Întreprinderea Poligrafică „13 Decembrie 1918",
Strada Grigore Alexandrescu nr. 89—97, București,
Republica Socialistă România.

Scanned with OKEN Scanner

În lucrarea sa MĂREŢIA ŞI LIMITELE GÎNDIRII MATEMATICE, cunoscutul istoric şi filozof al matematicii, Oskar Becker, supune unei analize minuţioase şi competente spectacolul impresionant al creaţiei matematice, începînd cu creaţiile antichităţii şi terminînd cu cele din zilele noastre. Căci, spune Becker, dacă „Blaise Pascal a scris despre măreţia şi mizeria omului, Honoré de Balzac despre strălucirea şi decadenţa curtezanelor, de ce nu s-ar putea scrie şi despre măreţia şi mizeria matematicii?“ Păstrînd specificul domeniului, lucrarea lui Becker poate fi pusă, fără nici o ezitare, la locul de cinste pe care îl ocupă scrierile lui Pascal sau Balzac.

Scanned with OKEN Scanner